



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STAVEBNÍ**

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

**ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY**

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

**EXPERIMENTÁLNÍ OVĚŘENÍ  
OPTIMÁLNÍHO TVARU NOSNÍKU**

EXPERIMENTAL VERIFICATION OF OPTIMAL SHAPE OF BEAM

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Matúš Uríček**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Ing. PETR FRANTÍK, Ph.D.**

**BRNO 2018**





# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

## FAKULTA STAVEBNÍ

<b>Studijní program</b>	B3607 Stavební inženýrství
<b>Typ studijního programu</b>	Bakalářský studijní program s prezenční formou studia
<b>Studijní obor</b>	3647R013 Konstrukce a dopravní stavby
<b>Pracoviště</b>	Ústav stavební mechaniky

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

<b>Student</b>	Matúš Uriček
<b>Název</b>	Experimentální ověření optimálního tvaru nosníku
<b>Vedoucí práce</b>	doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D.
<b>Datum zadání</b>	30. 11. 2017
<b>Datum odevzdání</b>	25. 5. 2018

V Brně dne 30. 11. 2017

---

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.

Vedoucí ústavu

---

prof. Ing. Miroslav Bajer, CSc.

Děkan Fakulty stavební VUT

## **PODKLADY A LITERATURA**

Literatura dle vývoje a pokynů vedoucího práce.

Brepta, R., Půst, L., Turek, F.: Mechanické kmitání, Technický průvodce 71, nakladatelství Sobotáles,  
Praha, 1994.

## **ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ**

Nastudování potřebných znalostí z doporučených podkladů a z dalších zdrojů. Zorientování se v problematice. Experimentální ověření únosnosti vybraných nosníků dle pokynů vedoucího práce.

## **STRUKTURA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).

---

doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D.

Vedoucí bakalářské práce

## **ABSTRAKT**

Práca sa zaoberá návrhom optimalizovaných tvarov nosníkov, ich následnou výrobou pomocou technológie 3D tlače a experimentálnym overovaním ich vlastností. Sleduje sa spôsob porušenia pri dosiahnutí medznej pevnosti. Informácie získané pri experimentoch sú zrovnávané s predpokladmi z numerických metód.

## **KĽÚČOVÉ SLOVÁ**

Štruktúrálna optimalizácia, 3D tlač, využiteľnosť, experimentálne overenie, únosnosť, tuhosť, napätie

## **ABSTRACT**

The thesis deals with design of beams of optimized shapes, which are then manufactured by 3D printer and their features are experimentally verified. When the limit strength of a given component is reached, ways of fracture development are observed. Information obtained from the experiments are then compared with assumptions generated by numerical methods.

## **KEYWORDS**

Structural optimization, 3D printing, experimental verification, carrying capacity, stiffness, stress

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE VŠKP**

Matúš Uriček *Experimentální ověření optimálního tvaru nosníku*. Brno, 2018. 60 s.,  
Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební  
mechaniky. Vedoucí práce doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D.

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 10. 5. 2018

---

Matúš Uriček

autor práce

Rád by som sa poďakoval pánovi Bc. Hynkovi Štětinovi z firmy 3D station za umožnenie využívania jeho 3D tlačiarňí.

Vďaka patrí taktiež pánovi prof. Ing. Miroslavovi Vořechovskému, Ph.D. a pánovi Ing. Václavu Sedílkovi, Ph.D. za možnosť využívania zaťažovacieho stoja a ich odbornú pomoc.

Najvrelejšie poďakovanie patrí pánovi doc. Ing. Petrovi Frantíkovi, Ph.D. za jeho bezprostredný pohotový prístup a za jeho srdečnosť

V Brně dne 10. 5. 2018

---

Matúš Uriček

autor práce



# OBSAH

## ÚVOD

1	3D TLAČ.....	12
1.1	POLYMÉRY.....	13
1.1.1	Technológie 3D tlače z polymérov.....	13
1.1.2	Materiály dostupné pre 3D tlač z polymérov.....	19
1.2	KOVY.....	21
1.2.1	Technológie 3D tlače z kovu.....	23
1.2.2	Materiály dostupné pre 3D tlač z kovu.....	24
1.3	INÉ MATERIÁLY.....	25
2	ŠTRUKTURÁLNA OPTIMALIZÁCIA.....	27
3	OHYB NOSNÍKU.....	29
3.1	NORMÁLOVÉ NAPAŤIA PRI OHYBE.....	30
3.1.1	Prierezový modul.....	32
3.1.2	Návrh a posúdenie prierezu pri ohybe.....	33
3.2	ŠMYKOVÉ NAPAŤIA ZA OHYBU.....	34
3.2.1	Nosník stáleho prierezu.....	34
3.2.2	Nosník premenného prierezu.....	36
4	KONKRÉTNÁ OPTIMALIZAČNÁ ÚLOHA.....	38
4.1	MODEL Č.1.....	39
4.1.1	Výpočtový model 1. návrhu.....	40
4.2	MODEL Č.2.....	42
4.3	MODEL Č.3.....	45

4.3.1	Výpočet predpokladaného priehybu.....	48
5	VÝSLEDKY EXPERIMENTOV.....	50
5.1	MODEL Č.1.....	50
5.1.1	Porovnanie s predpokladom a vyhodnotenie.....	52
5.2	MODEL Č.2.....	52
5.2.1	Porovnanie s predpokladom a vyhodnotenie.....	54
5.3	MODEL Č.3.....	55
5.3.1	Porovnanie s predpokladom a vyhodnotenie.....	56
5.4	VZÁJOMNÉ POROVNANIE MODELOV.....	57
	ZÁVER.....	58
	POUŽITÁ LITERATÚRA.....	59
	ZOZNAM TABULIEK.....	60
	ZOZNAM OBRÁZKOV.....	61

## ÚVOD

V tejto práci autor pojednáva o určitých metódach pre určenia optimálneho tvaru nosníku a za využitia niektorých z nich následne vytvára počítačové modely. Tie sú použité ako predloha pre výrobu reálnych modelov za pomoci technológie 3D tlače z polymérového materiálu s označením ABS. V experimentálnej skúške trojbodovým ohybom sú tieto prvky zaťažované až do porušenia. Sleduje sa ich priebeh za pôsobiaceho zaťaženia, chovanie pri zaťažovaní a v neposlednej rade aj maximálna únosnosť a mechanizmus vzniku trhlín.

Sekundárnym cieľom štúdie je zoznámenie sa s teoretickou stránkou technológií generatívneho dizajnu, so škálou dostupných materiálov a ich vlastnosťami. Autor naďalej predstavuje spôsoby využitia daných technológií v inžinierskej praxi a na vzdelávacie účely.

Výsledkami práce sú výstupy zo zaťažovacieho stroja, porovnané s predpokladanými hodnotami získanými pomocou matematických metód. Čiastočne je možné overiť presnosť daných teoretických výpočtov a odhaliť prípadné nezrovnalosti alebo okrajové podmienky, ktoré sa z teórie vymykajú.

Vďaka väčšiemu počtu testovaných prvkov a ich zvyšujúcej sa progresivite je možné porovnať a overiť rôzne prístupy k optimalizácii komponentu. Taktiež bude možné odhaliť špecifické požiadavky, ktoré je nutné zohľadniť pri výrobe a optimalizácii prvkov z použitého materiálu a za využitia danej výrobnéj technológie.

# 1 3D TLAČ

3D tlačou sa rozumie akýkoľvek proces, pri ktorom materiál tuhne alebo je inak spojovaný za kontroly počítačom, s účelom vytvoriť trojdimenzionálny objekt. Líši sa od klasických spôsobov priemyselnej výroby, pri ktorých konečný objekt zvyčajne vzniká odobraním materiálu z väčšieho primárneho objektu alebo jeho iným opracovaním, prípadne vyliatím tuhnuceho materiálu do predom pripravenej formy.

Medzi hlavné praktické využitia technológie 3D tlače patrí vytváranie takzvaných rapídnych prototypov (rapid prototyping) a aditívna produkcia (additive manufacturing/AM). Názov rapid prototyping v skutočnosti od vzniku 3D tlače v osemdesiatych rokoch až do začiatku dvadsiateho prvého storočia pomenovával celý obor tejto technológie. V profesionálnej komunite sa v súčasnosti dostáva do popredia označenie AM, ktoré v sebe zahŕňa širokú škálu technológií a názov 3D tlač sa stáva jeho podmnožinou.

Vytváranie prototypov bolo od počiatku 3D tlače jej hlavnou aplikáciou a do súčasnosti tomu tak je. Tento prístup sa využíva najmä v leteckom a automobilovom priemysle, ale v poslednom období prechádza do takmer všetkých priemyselných oblastí. Pre uvedenie len niekoľkých príkladov, malé alebo vznikajúce spoločnosti používajú túto technológiu pre vytváranie funkčných prototypov, ktoré im pomáhajú pri hľadaní investorov; výrobcovia pneumatík vytláčajú vzorky dezénu, ktorý následne testujú na protišmykové vlastnosti.

Aditívna alebo tiež takzvaná digitálna produkcia označuje výrobu konečných produktov pre komerčný trh, prípadne nástrojov využívaných vo výrobe, ako sú napríklad špecializované prípravky alebo formy. Konkrétne využitie je napríklad v leteckom a raketovom priemysle, ale taktiež v medicíne, textilnom priemysle, zlatníctve a mnohých ďalších.[1]

## 1.1 POLYMÉRY

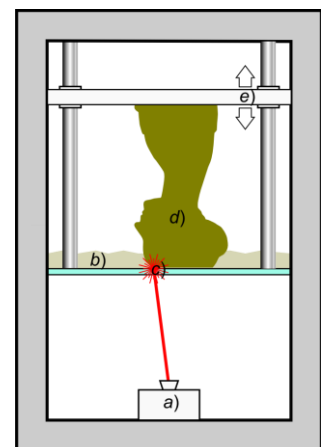
Za vynálezcu prvej technológie 3D tlače je považovaný Hideo Kodama z Nagoyského priemyselného výskumného ústavu, ktorý v roku 1981 využil koncentrované UV žiarenie na vytváranie trojdimenzionálnych plastových modelov za procesu zvaného fotopolymerezácia termoplastov.

Od tej doby po súčasnosť boli vyvinuté mnohé technológie s desiatkami variácií pre vytváranie 3D modelov z plastu. V nasledujúcej podkapitole sa budeme venovať tým najdôležitejším z nich.[2]

### 1.1.1 Technológie 3D tlače z polymérov

Medzi najrozšírenejšie technológie 3D tlače z plastu patria:

**Stereolitografia** alebo **SLA** je technologický proces, pri ktorom je trojdimenzionálny objekt vytváraný tuhnutím polymérneho roztoku (živice), za procesu zvaného fotopolymerezácia – pri pôsobení koncentrovaného ultrafialového žiarenia roztok mení svoje skupenstvo z kvapalného na tuhé. Tento proces je možný vďaka citlivosti určitých polymérov na pôsobenie UV žiarenia. Tieto materiály nazývame fotopolyméry. U technológie SLA rozoznávame dva technologické prístupy.



**Obr. 1.1** SLA, spôsob zdola-nahor

Prvým z nich je takzvaný spôsob zhora-nadol, ktorý sa väčšinou využíva v priemyselnom sektore. Jedná sa o princíp, keď sa fotopolymérna doska nachádza tesne pod hladinou roztoku. Zdroj koncentrovaného UV žiarenia, zväčša laser, pôsobí zhora na požadovanú plochu dosky, čím materiál tuhne a je vytvorená prvá vrstva. Následne sa doska posunie o hrúbku jednej vrstvy nižšie a proces sa opakuje.

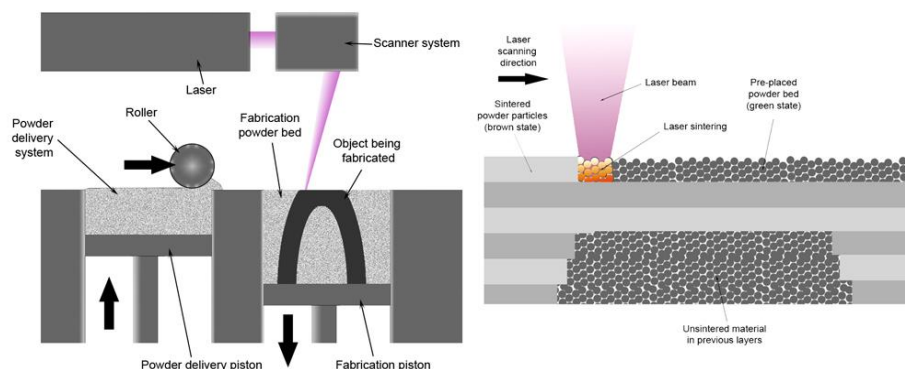
Druhý prístup je spôsob zdola-nahor, ktorý sa častejšie využíva u takzvaných stolných zariadení. V tomto prípade pôsobí zdroj UV žiarenia na priehľadný spodok nádoby s roztokom zdola a požadovaná vrstva sa vytvára na jeho vrchnom povrchu. Prvá vrstva je zároveň prichytená k spodnej hrane pohyblivej dosky a po jej dokončení sa táto doska pohne o hrúbku jednej vrstvy nahor, vrstva sa oddelí od priehľadného povrchu, nový materiál voľne natečie pod túto vrstvu a celý proces sa opakuje. Hlavnou výhodou tohto prístupu je to, že celková výška vytváraného objektu nie je obmedzená rozmermi nádoby, tak ako je tomu u prístupu zhora-nadol.

Výhodami tejto technológie je vysoká procesná rýchlosť, veľmi dobrá dosiahnuteľná presnosť a u technológie zdola-nahor aj možnosť vytvárania veľkorozmerných objektov (v čase písania tejto práce už existujú tlačiarne schopné vytvorenia jednoliatych objektov o dĺžke dva metre).

Nevýhodou je momentálne vysoká cena používaných živíc a samotných 3D tlačiarni. Ceny sa však rok od roku výrazne znižujú.

**Selekčné Laserové Spekanie** (Selective Laser Sintering) alebo **SLS** je technológia využívajúca vysokovýkonný laser na spekanie prachových častíc požadovaného materiálu, ktorý je nanášaný po vrstvách.

Tento proces ponúka širokú škálu priemyselných využití, keďže je vďaka nemu možné vytvárať komponenty vysokej kvality (zrovnateľné s klasickými výrobnými procesmi) a zároveň je vhodný pre širšiu škálu materiálov než iné technológie 3D tlače.



**Obr. 1.2:** Schéma pracovného procesu tlačiarne na báze SLS

Technológia doposiaľ našla svoje využitie iba v priemyselnom sektore, keďže pre domáce použitie je vzhľadom na svoj charakter príliš drahá a zároveň potencionálne nebezpečná. Napriek tomu však už existujú firmy, ktoré pracujú na stolnej verzii tohto zariadenia.

Keďže hustota materiálu hotového komponentu závisí skôr na maximálnom výkone laseru než na jeho stálosti, SLS stroje spravidla využívajú pulzné lasery. Celá pracovná komora stroja je navyše predhriata na teplotu len o trochu nižšiu než je tavný bod daného materiálu, takže úlohou laseru je teplotu len mierne zvýšiť nad požadovanú hranicu.

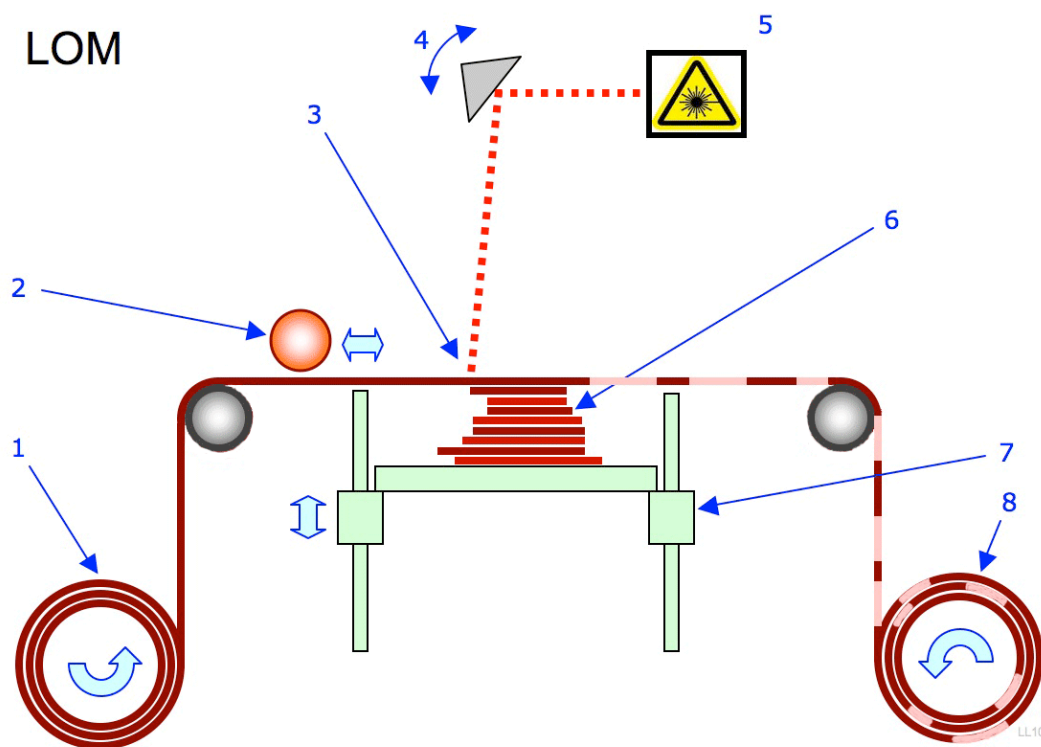
Výraznou výhodou tejto technológie je to, že vytváraný komponent nepotrebuje podporné štruktúry, ktoré sú u iných technológií nutné pri vytváraní prevísajúcich častí, keďže komponent je zo všetkých strán obklopený nespečeným materiálom (znázornené na obrázku 1.2).

Ďalšími výhodami sú vysoká pevnosť, tuhosť a chemická odolnosť hotových komponentov. Je možné vytváranie vysoko komplexných objektov s vnútornými dutinami a kanálmi. Vysoká škála využiteľných materiálov.

Nevýhodou je pórovitosť povrchu (môže byť zapečatený pomocou povlaku, napríklad kyanokrylátu) a nemožnosť vytvárania úplne uzatvorených komôr.

**Výroba Objektu Laminovaním** (Laminated Object Manufacturing) alebo **LOM** je technológia, ktorá sa svojím charakterom výrazne líši od iných technológií 3D tlače. Materiál je do procesu dodávaný vo forme fólie, ktorá je navinutá na kotúč.

Pri výrobnom procese sa požadovaný kus fólia navinie do pracovného priestoru skrz predhrievací valec. Pohyblivá platforma pritlačí vytváraný objekt k navinutej fólii, ktorá k nemu priľne vďaka predhriatiu. Pomocou laseru je z fólie vyrezaný požadovaný tvar vrstvy. Platforma zídde o kúsok nižšie, použitá fólia je nahradená novým listom a proces sa opakuje až do vytvorenia kompletného objektu.



**Obr. 1.3:** 1-zásoba fólie, 2-predhrievací valec, 3-laserový lúč, 4-usmerňovací hranol, 5-laser, 6-vrstvy, 7-pohyblivá platforma, 8-odpad

Výhodou tohto procesu je vysoká rýchlosť. Nevýhodami sú nemožnosť vytvárania vnútorných dutín (objekt musí mať plnú výplň) a vytváranie značného množstva odpadu.



**Výroba pritavovaním materiálu** (fused deposition modeling) alebo **FDM** je technológia, ktorej budeme venovať zvýšenú pozornosť, pretože práve táto technológia bola využitá k vytváraniu modelov skúmaných v tejto práci.

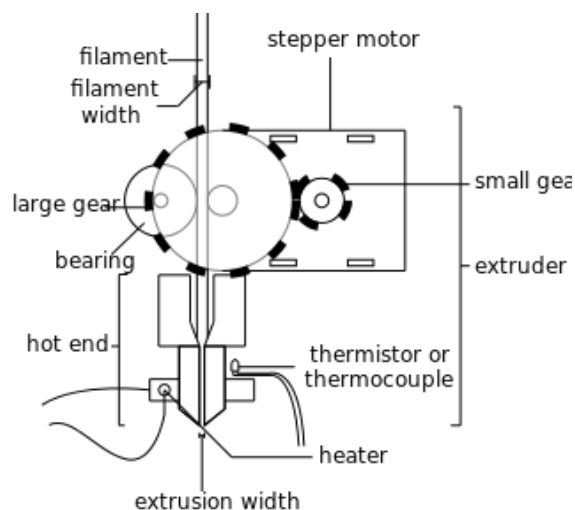
Jedná sa o jednoznačne najrozšírenejšiu technológiu v oblasti stolných alebo takzvaných domácich 3D tlačiarňí. Vynájdená bola v osemdesiatych rokoch dvadsiateho storočia a komercializovaná v roku 1990 firmou Stratasys. Po expirácii patentu zažila výrazný vzostup vďaka open-sourceovej komunite RepRap, ktorá k stavbe 3D tlačiarňí využíva komponenty vytvorené pomocou 3D tlače (znova FDM). Predovšetkým vďaka otvorenému zdieľaniu



**Obr. 1.4:** Prusa MK2

informácií z výskumu tejto technológie sa cena FDM tlačiarňí od jej vzniku znížila o dva rády. Ako príklad je na obrázku 1.4 uvedená 3D tlačiareň MK2 od českej firmy Prusa, ktorej cena je (v prípade, že si ju zákazník postaví sám) iba 16000 Kč. Stroje od tejto firmy sú celosvetovo najpredávanejšie.

Princípom danej technológie je, že tuhý materiál vo forme drôtu zvinutého do rolky je ťahaný do hlavy 3D tlačiarne (extrudéra) pomocou krokového motoru, kde je tavený a zo špičky extrudéra vytlačovaný vďaka navíjaniu ďalšieho materiálu. Hlava sa pohybuje v rovine podkladovej dosky, pričom vytvára jednu vrstvu



**Obr. 1.5:** Schéma extrudéra

požadovaného komponentu. Po dokončení vrstvy sa hlava posunie o výšku jednej vrstvy nahor a začína vytvárať ďalšiu vrstvu.

Výhodami tejto technológie je jej dostupnosť a možnosť využitia veľmi širokej škály materiálov. Jednou z nevýhod sú obmedzené mechanické vlastnosti, keďže materiál je v komponente laminovaný a tým pádom je anizotropný. Tento účinok je možné znížiť dodatočným stavením pri vložení hotového komponentu do pece so správnou teplotou. Ďalšou nevýhodou je, že výrobný proces je relatívne pomalý v zrovnaní s inými technológiami 3D tlače.

**PolyJet** je technológia, ktorá sa radí medzi tie najnovšie a najdokonalejšie. Principiálne je podobná moderným atramentovým tlačiarňam, avšak namiesto striekania drobných kvapôčok farby, trysky PolyJetu nanášajú vrstvy fotopolyméru o jemnosti len 16 mikrónov (v minime), ktorý je simultánne ošetrovaný UV žiarením, čím sú vytvárané 3D modely s veľmi vysokou presnosťou ( $\pm 0.1$  mm).



**Obr. 1.6**

Výnimočnou vlastnosťou tejto technológie je, že je možné vytvárať modely za využitia mnohých materiálov zároveň. Vďaka tomu je možný napríklad plynulý prechod od tuhého materiálu k flexibilnému, čo so sebou prináša nevídané technické možnosti. Navyše je možné používať rôzne farby materiálov zároveň, od tmavých až po úplne priehľadnú.

Medzi hlavné výhody tejto technológie patrí už spomínaná presnosť – hotový produkt nepotrebuje dodatočnú úpravu povrchu, ale je to tiež veľmi

vysoká rýchlosť (až 1000 cm<sup>3</sup> za hodinu). Nevýhodou je, že nedokáže vytvárať prevísajúce štruktúry – nutnosť častých podpôr.

### 1.1.2 Materiály dostupné pre 3D tlač z polymérov

3D tlač z plastov ponúka veľmi širokú škálu materiálov rôznorodých vlastností. V tejto práci budeme venovať pozornosť iba tým z nich, ktoré majú najširšiu využiteľnosť a skorými sa môžeme v praxi najčastejšie stretnúť.

**ABS** (akrylonitril butadién styrén) je jedným z najpoužívanějších materiálov v technológii FDM, predovšetkým v priemyselnom sektore. Zároveň je to materiál, ktorý bol využitý na výrobu testovacích modelov v tejto práci. Je to húževnatý, pružný a ľahko lisovaním a vytlačovaním spracovateľný termoplastický polymér. Používa sa na produkciu širokej palety výrobkov od drobných uzáverov a kufríkov cez súčasti automobilov až po hračky vrátane celosvetovo známych kociek LEGO.

Z hľadiska mechanických vlastností je možné vyzdvihnúť jeho vysokú pevnosť a rázovú húževnatosť, ktoré sú stále v relatívne širokom rozmedzí teplôt. Jeho modul pružnosti sa pohybuje okolo 2Gpa, pričom je možné ho ešte zvýšiť pomocou prísad. Má nižšiu odolnosť voči UV žiareniu, tú je však možné zvýšiť pomocou aditív. Odolnosť voči chemickým vplyvom je pomerne dobrá, odoláva účinkom vody, anorganických solí, slabých kyselín a zásad.

**PLA** (polylactic acid) je biodegradovateľný a bioaktívny termoplastický polyester vyrábaný z obnoviteľných zdrojov ako je škrob z kukurice alebo

cukrovej trstiny. Momentálne je svetovo najpoužívanejším a najpopulárnejším materiálom pre komerčnú 3D tlač pomocou technológie FDM, predovšetkým kvôli jeho užívateľskej prívetivosti. Aj človeku s veľmi malou skúsenosťou v oblasti 3D tlače sa väčšinou podarí vytvoriť veľmi pekný model.

V porovnaní s ABS má PLA nízky bod tavenia a malú tepelnú rozťažnosť, preto sa objekty pri vytváraní menej ohýbajú a 3D tlačiareň nepotrebuje kryt voči poveternostným vplyvom. Má však horšie mechanické vlastnosti, predovšetkým vyššiu krehkosť a nižšiu teplotnú stálosť. Taktiež má výrazne nižšiu chemickú odolnosť.

**Kompozitné polyméry** sú v oblasti 3D tlače iba na úplnom začiatku ale ponúkajú ohromný potenciál. Problémom vo výrobe komponentov z karbónových vlákien je doterajšia nutnosť kvalifikovanej ľudskej práce a vysoká pracnosť, ktoré držia ich cenu vysoko. Zvyčajne sú karbónové kompozity vytvárané tak, že pracovníci nanášajú jednotlivé vrstvy uhlíkových vlákien napustené živicom na formu až do dosiahnutia požadovanej konštrukčnej hrúbky a následne sa komponent vloží do pece, kde sa vlákna spolu prepoja.

Vo vývoji sú však technológie, ktoré dokážu vkladať uhlíkové vlákna priamo do materiálu objektu vytváraného pomocou 3D tlače. Zaujímavým príkladom je firma Arevo, ktorá ako prvá vytvorila kompozitnú kostru bicykla pomocou 3D tlače, vďaka čomu je jej výrobná cena nižšia než 300\$.



**Obr. 1.7:** bicykel s kompozitnou kostrou od spoločnosti Arevo

Technológia 3D tlače taktiež výrazne znižuje náklady u klasickej výroby kompozitných materiálov, napríklad vďaka možnosti rýchleho vytvárania špecifických foriem. Možné je tiež produkovať formy z rozpustného materiálu, čo otvára znova ďalšie možnosti

Medzi ďalšie významné polyméry ktoré jednoznačne stoja za zmienku patria **ASA** (akrylonitril styrén akrilát), **nylon**, **polykarbonát**, **akryl**, **PPSF** (polyfenilsulfon), **syntetická guma** a **PVA** (vo vode rozpustný polyvinyl alkohol).

## 1.2 KOVY

3D tlač z kovov je mladšou technológiou, avšak od svojho vzniku už prešla veľmi prudkým vývojom a v súčasnosti je zrejmé, že je to práve aditívna výroba z kovov, ktorá bude mať najdramatickejší dopad na spracovateľský priemysel. Nie len že umožňuje výrazne urýchľovať dizajn konečných produktov vďaka tomu, že spoločnostiam dáva nástroj na vytváranie plnohodnotných prototypov, stáva sa tiež nástrojom pre ich samotnú produkciu.

Klasickými technológiami vo výrobe kovových komponentov sú zvyčajne substrakcia (napríklad frézovanie v CNC stroji), odlievanie do foriem, prípadne lisovanie. Rozhodujúcou cenovou položkou pri výrobe konečného produktu zväčša nie je cena samotného surového materiálu, z ktorého je vyrobený, ale práca vložená do výrobného procesu. U technológie 3D tlače je však situácia výrazne odlišná. Cena produktu pozostáva výhradne z ceny za energiu, materiál a amortizovanej hodnoty stroja.

To nám otvára dvere k úplne odlišnému prístupu k návrhu konštrukcií. Vďaka generatívnemu dizajnu a optimalizácii využitia materiálu sme schopný navrhnuť štruktúru z minimálneho množstva materiálu, čím sa zároveň zvyšuje rýchlosť jej výroby, keďže tá prakticky závisí výhradne na objeme požadovaného produktu. Toto znamená, že môžeme siahť po drahších a kvalitnejších materiáloch za súčasného zníženia celkových nákladov.



**Obr. 1.8:** sedadlová konzola navrhnutá firmou GM

Priemyselné oblasti do ktorých tento prístup už stihol preniknúť, sú automobilový, letecký a raketový priemysel. Ako príklad je na obrázku 1.8 znázornená sedadlová konzola použitá v novom modeli automobilu od spoločnosti General Motors. Konzola vpravo je vytvorená z jedného kusu pomocou technológie 3D tlače, v porovnaní z predošlým modelom, ktorý sa skladal z ôsmich komponentov. Navyše bolo možné znížiť hmotnosť o 40% za súčasného zvýšenia pevnosti o 20%.

Príkladom z leteckého priemyslu je komponent na obrázku 1.9 od spoločnosti Boeing, ktorá tvrdí, že vo svojom najnovšom modeli lietadla využije viac než tisíc súčiastok vyrobených pomocou 3D tlače. Podobných

príkladov bude časom len pribúdať a pravdepodobne táto technológia čoskoro prenikne aj do ďalších priemyselných oblastí.



**Obr. 1.9:** komponent od spoločnosti Boeing

### 1.2.1 Technológie 3D tlače z kovu

Medzi svetovo najpoužívanjšie technológie patria:

**DMLS** (Direct Metal Laser Sintering) je principiálne podobná technológií SLS, ktorú sme opísali v kapitole 1.1.1 a schéma na obrázku 1.2 zodpovedá aj technológií DMLS. Rozdiel je však v tom, že DMLS sa používa na spekanie prachových častíc kovu a preto sú špecifikácie stroja využívajúce túto technológiu výrazne odlišné.

Pojem spekanie nám napovedá, že častice kovu nie sú pri tomto procese zahrievané až nad bod tavenia, na čo by bol potrebný výrazne výkonnejší laser. Povrch prachovej časti je však výrazne zohrievaný a pripája sa k vrstve už vytvoreného materiálu. Výhodou tejto technológie je, že nevytvára vnútorné pnutie v materiáli a jeho vhodná pre veľmi širokú škálu kovov.

**SLS** (Selective Laser Melting) je metóda, pri ktorej sú prachové častice priamo zatavované do predošlej vrstvy vytváraného modelu. Laická verejnosť často považuje technológie DMLS a SLS za jedno a to isté, keďže tak navonok vyzerajú, rozdiel je však vo výkone stroja. Pomocou technológie SLS je možné vytvárať modely s veľmi vysokou hustotou a pevnosťou, ktoré môžu byť použité ako konečný komponent. Nevýhodou je, že pri výrobnom procese vzniká v materiáli určité vnútorné pnutie, ale to vzniká aj za využitia konvenčných technológií.

**EBM** (Electron Beam Melting) je technológia podobná metóde SLS, avšak na rozdiel od nej využíva na tavenie kovu elektrónový lúč. Jedná sa o najmodernejšiu technológiu z uvedených. Jej nevýhodou je, že sa dá zatiaľ použiť len pre veľmi úzku škálu materiálov, ako je titán a kobalt-chróm. Vytvára veľmi kvalitné komponenty a doposiaľ sa využíva iba v raketovom priemysle.

### 1.2.2 Materiály dostupné pre 3D tlač z kovov

Technológia 3D tlače sa využíva na vytváranie modelov zo širokej škály kovov a kovových zliatin, v tejto práci sa však budeme bližšie venovať iba tým, ktoré vďaka svojmu charakteru a vlastnostiam ponúkajú najväčší potenciál využitia vo sfére konštrukčného inžinierstva.

**Titán** je kov s vysokou pevnosťou vzhľadom ku svojej hustote. Jeho pevnosť je zrovnateľná s vysokopevnostnou oceľou, avšak je možné vytvoriť ďaleko ľahšiu konštrukciu. Má vysokú odolnosť voči únave, vzniku trhlín a vysokým teplotám. Jeho chemická stálosť z neho robí vhodný materiál pre použitie v zdravotníctve, napríklad na výrobu implantátov. Jeho nevýhodou je veľmi



náročná spracovateľnosť a zvárateľnosť, ktoré si vyžadujú špeciálne technologické postupy a negatívne vplyvajú na celkovú cenu konečného výrobku z tohto materiálu. Tento problém sa však postupne stáva minulosťou vďaka technológii 3D tlače, ktorá naplno odomyká jeho potenciál. Najväčším spotrebiteľom je letecký priemysel, napríklad Airbus A380 obsahuje 77 ton titánu, vrátane jedenástich ton v motoroch.

**Kobalt-Chróm** je, ako názov napovedá, zliatina kobaltu a chrómu, ktorá zažíva prudký rozvoj svojho využitia, najmä vďaka aplikácii v technológii 3D tlače. Jej hlavné prednosti spočívajú vo veľmi vysokej chemickej odolnosti a mechanickej trvanlivosti. Svoje najčastejšie využitie nachádza v obore medicíny ako materiál na výrobu implantátov, predovšetkým ortopedických. Taktiež sa stáva svetovo najpoužívanejšou zliatinou vo výrobe zubných náhrad. Vďaka svojej vysokej odolnosti voči mechanickému opotrebeniu sa používa tiež na výrobu turbín a komponentov do motorov.

Medzi ďalšie významné kovy využívané vo výrobe pomocou 3D tlače patria **nehrdzavejúca oceľ**, **Inconel** (takzvaná superzliatina), **hliník**, **zlato**, **striebro**, **bronz**.

### 1.3 INÉ MATERIÁLY

Okrem kovov a polymérov existuje ešte široká škála materiálov využívaných v 3D tlači. Špecifické technológie sú spravidla odvodené od prístupov prebratých v minulých kapitolách. V tejto kapitole len stručne spomenie tie materiály, ktoré majú najväčší technický potenciál.

**Keramika** sa v obore 3D tlače začala využívať len veľmi nedávno, avšak už teraz ponúka príslub širokých aplikácií. Za spomenutie stojí jej umelecký

význam vo výrobe nevidaných dizajnov kuchynskej a sanitárnej keramiky. Skúmané sú tiež technologické postupy, pri ktorých by bolo možné kombinovať keramiku s kovmi v jednom aditívnom procese. To by mohlo mať význam napríklad v automobilovom priemysle (brzdne kotúče, hlavy valcov a iné).

**Vosk** nachádza svoju aplikáciu v zlatníctve na výrobu foriem (negatívov), ktoré sú vylievané roztaveným zlatom alebo inými drahými kovmi. Otvára to cestu k úžasnej tvarovej variabilite.

**Betón** je materiál z ktorého 3D tlačou sa už niekoľko rokov experimentuje a dokonca už existujú aj funkčné modely v plnej mierke. S touto technológiou je však stále spájané množstvo problémov, ako nemožnosť hutnenia, vysoká pórovitosť a problematika vkladania výstuže. Avšak vďaka aplikácii moderných aditív je možné do vysokej miery ovplyvňovať vlastnosti mokrej zmesi a vyhovovať tak náročným architektonickým požiadavkám. Významnejšie postavenie 3D tlače však v súčasnosti zastáva vytváranie foriem, napríklad z polymérov, ktoré následne zabezpečujú vonkajší tvar konečného betónového prvku.

**Biomateriály** sú v oblasti 3D tlače často diskutovaným pojmom, aj keď sa doposiaľ nachádzajú len v štádiu výskumu. Rozhodne je to však oblasť s obrovským potenciálom. Univerzity pracujú napríklad na možnostiach vytlačania celých orgánov pre transplantáciu pozostávajúcich priamo z buniek príjemcu (vytvorených z jeho kmeňových buniek).

Ďalšími materiálmi stojacimi za zmienku sú **sadra, papier a jedlo**.

## 2 ŠTRUKTURÁLNA OPTIMALIZÁCIA

Štruktúrálna optimalizácia spadá pod teóriu kontroly optima. K formulácii štruktúrálnu optimalizačného problému je nutné, podľa prílohy, definovať funkciu veličiny ( $f$ ), u ktorej sa snažíme dosiahnuť minima, maxima, prípadne sa priblížiť k určitej hodnote alebo množine hodnôt. Typickými príkladmi uvažovaných veličín môžu byť tuhosť alebo objem konštrukcie.

Taktiež je potrebné definovať určité návrhové a stavové premenné, ktoré vstupujú do funkcie ( $f$ ). Návrhové premenné ( $x$ ) popisujú dizajn štruktúry a môžu reprezentovať jej geometriu. Stavové premenné ( $y$ ) reprezentujú odozvu konštrukcie a môže medzi ne patriť napätie ( $\sigma$ ), deformácia ( $\epsilon$ ) a posunutie ( $u$ ). Stavové premenné sú závislé na návrhových premenných, platí  $y(x)$ . Funkcia danej veličiny ( $f$ ) je závislá na návrhových a stavových premenných a na okrajových podmienkach, ktorá slúžia k nasmerovaniu optimalizácie k požadovanému výsledku:

$$\begin{aligned} \min/\max f(x,y(x)) \quad & \wedge \quad x \in \langle \text{okrajové podmienky pre } x \rangle \\ & y(x) \in \langle \text{okrajové podmienky pre } y(x) \rangle \quad (2.1) \\ & f(x,y(x)) \in \langle \text{podmienky rovnováhy} \rangle. \end{aligned}$$

Ako stavová funkcia  $g(x)$ , ktorá reprezentuje stavovú premennú, môže byť napríklad zavedené posunutie v určitom smere. U tejto stavovej funkcie môže byť zavedená podmienka ovplyvňujúca výsledok optimalizačnej úlohy. Vezmime do úvahy prípad, v ktorom je  $g(x)$  reprezentované vektorom posunutia,  $g(u(x))$ . K vytvoreniu stavovej funkcie je potom nutné vyriešiť rovnicu:

$$u(x) = \mathbf{K}(x)^{-1} \mathbf{f}(x), \quad (2.2)$$

kde  $\mathbf{K}$  reprezentuje globálnu maticu tuhosti a  $\mathbf{f}$  globálny vektor zaťaženia.

Častou okrajovou podmienkou štruktúrálnej optimalizačnej úlohy je obmedzenie priehybu, ktoré nesmie prekročiť určitú hodnotu ( $a$ ). Pri zohľadnení rovnice 2.2 môžeme povedať, že optimalizačná úloha je vyjadrená takzvanou vnorenou formuláciou, kde podmienky rovnováhy sú zabezpečené pomocou formulácie stavovej funkcie:

$$\min/\max f(x) \wedge g(u(x)) \leq a. \quad (2.3)$$

Optimalizačná úloha reprezentovaná rovnicou (2.1) sa nazýva simultánna porovnávacía formulácia. Rovnica (2.3) sa zvyčajne rieši vyhodnotením derivácií funkcií  $f$  a  $g$  podľa  $x$ . V tomto kontexte  $x$  reprezentuje geometrickú vlastnosť. Podľa toho, aká geometrická vlastnosť je parametrizovaná, môžeme úlohy štruktúrálnej optimalizácie rozdeliť do troch kategórií:

- **Rozmerová optimalizácia:** dizajnová premenná  $x$  môže reprezentovať napríklad prierezovú plochu nosníku. Optimálna hodnota zvyčajne minimalizuje určitú fyzikálnu veličinu ako napríklad deformačnú energiu, pričom musia byť dodržané okrajové podmienky.
- **Tvarová optimalizácia:** dizajnová premenná  $x$  reprezentuje okrajové podmienky stavovej premennej, opäť za snahy dosiahnuť minimum pre určitú fyzikálnu veličinu, prípadne minimalizovať určité posunutia.
- **Topologická optimalizácia:** dizajnová premenná  $x$  reprezentuje spojitosť, prípadne množstvo súčastí, z ktorých sa skladá uvažovaný celok s ohľadom na ich vzájomné pôsobenie. Môže sa použiť napríklad k určeniu optimálneho množstva prvkov stavebnej konštrukcie. [3]

### 3 OHYB NOSNÍKU

Informácie uvedené v tejto kapitole sú prebraté z [4].

Ohyb charakterizuje chovanie prvku v závislosti na vonkajšie zaťaženie, ktoré pôsobí kolmo na pozdĺžnu osu. Je možné ho reprezentovať ako dvojicu pôsobení pozdĺžneho ťahového a tlakového namáhania. Medzilahlá osa, ktorá namáhaná nie je, sa nazýva neutrálna osa.

Pri ohybe nosníku vznikajú v jeho priereze ohybové momenty a posúvajúce sily. Pôvodne priama osa nosníku sa ohne, to znamená, že sa zmení na rovinnú  $n$ -priestorovú krivku. V tejto kapitole sa zameriame na rovinný ohyb, pri ktorom vonkajšie sily vrátane reakcií ležia v jednej z hlavných rovín nosníku alebo sú k nej symetrické. Hlavné osy sú tie, ktoré prechádzajú osou nosníku  $x$  a niektorou z hlavných ôs zotrvačnosti prierezu ( $y$  alebo  $z$ ). U nosníkov, predovšetkým tenkostenných, musí rovina prechádzať spojnicou stredou šmyku prierezu, pokiaľ nemá dôjsť ku krúteniu.

Pre rovinný ohyb v rovine potom platí:

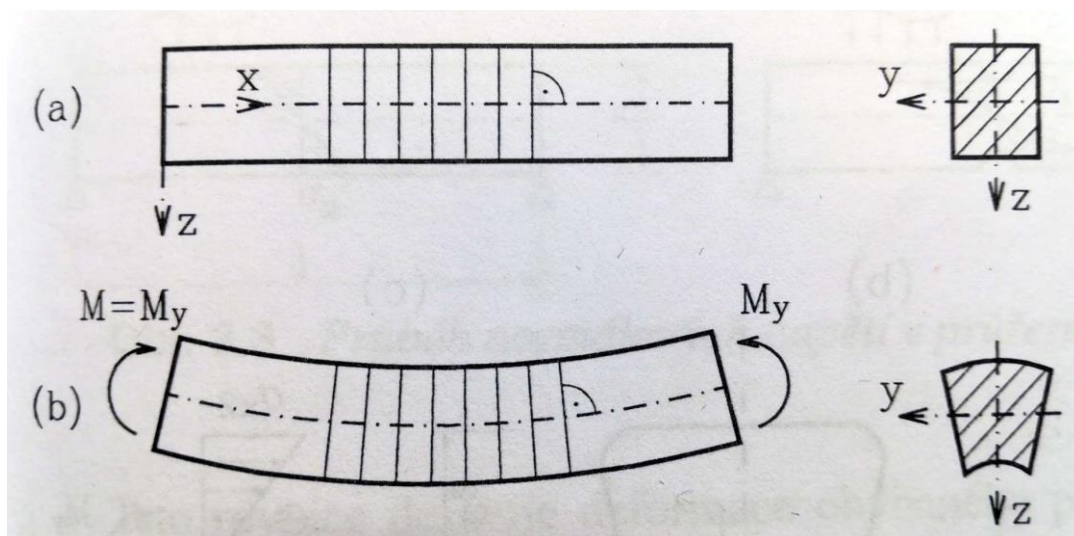
$$N = V_y = 0, \quad M_x = M_z = 0, \quad (3.1)$$

a nenulovými zložkami vnútorných síl sú ohybový moment  $M_y$  a posúvajúca sila  $V_z$  (v prípade, že je rovina ohybu zrejmá, často vypúšťame indexy; potom platí:  $M = M_y, V = V_z, q = q_z$ ).

Pri odvodení vzťahov pre normálové napätia  $\sigma_x$  v priereze vychádzame – podobne ako u osového ťahu a tlaku – z dvoch základných predpokladov:

- a) Prierezy rovinné a kolmé k ose prutu pred deformáciou zostávajú rovinnými a kolmými k deformovanej ose (Bernouliho hypotéza),
- b) Pozdĺžne vlákna na seba vzájomne netlačia, t.j.

$$\sigma_y = \sigma_z = 0. \quad (3.2)$$



**Obr. 3.1:** Rovinnosť prierezu pri prostom ohybe

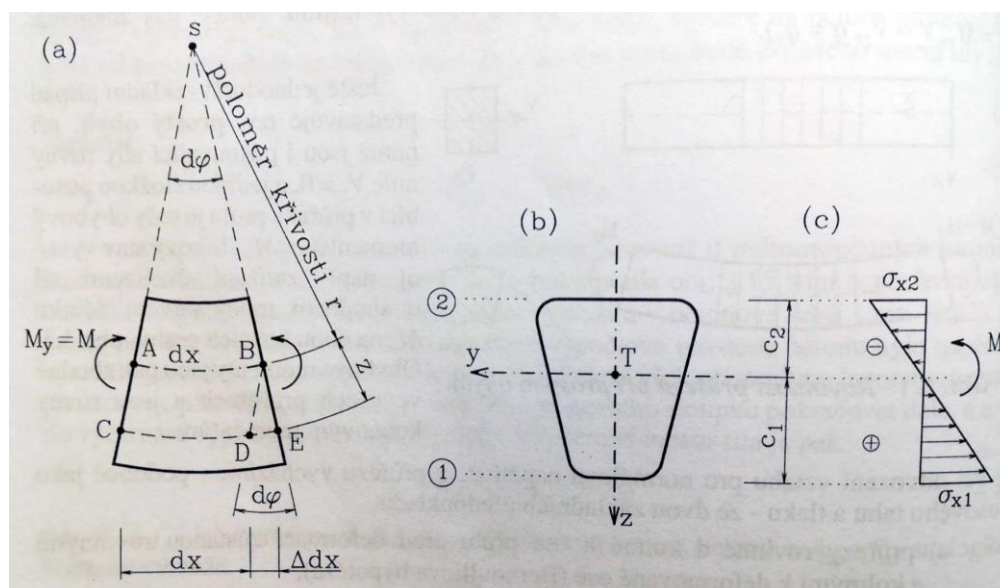
Predpoklad a) je znázornený na obrázku 3.1. Má deformačnú (geometrickú) povahu a môžeme z neho odvodiť vzťahy medzi deformáciou jednotlivých vlákien prutu (hmotných rovnobežiek s osou x).

### 3.1 NORMÁLOVÉ NAPÄTIA PRI OHYBE

Uvažujme elementárny úsek o dĺžke  $dx$ . Vplyvom ohybu sa prierezy vzájomne pootočia o  $d\varphi$  (obr. 4.2), na spodnej strane, ak je  $M_y > 0$ , sa vlákna predĺžia a navrchu sa skrátia. V určitej úrovni je teda neutrálna vrstva, ktorej dĺžka zostane zachovaná; jej polomer krivosti označíme  $r$ . Ak budeme predbežne predpokladať, že neutrálna vrstva prechádza ťažiskom prierezu, teda osou x, potom pre pomerné pretvorenie obecného vlákna platí:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z d\varphi}{r d\varphi} = \frac{z}{r}, \quad (3.3)$$

kde  $r$  predstavuje polomer krivosti deformovaného prutu,  $z$  je vzdialenosť uvažovaných vlákien od neutrálnej roviny.



**Obr. 3.2:** Deformácie a napätia ohýbaného prutu (nosníku)

Pomerné pretvorenia teda prebiehajú lineárne po výške prierezu. Aby sme odtiaľ odvodili rozloženie napätia, použijeme pre lineárne pružný materiál Hookov zákon, keďže napätia  $\sigma_y$  a  $\sigma_z$  sú podľa (3.2) rovné nule. Platí teda:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{E}{r} z, \quad (3.4)$$

V tejto rovnici nepoznáme polomer krivosti  $r$ . Využijeme teraz statickú podmienku ekvivalencie vnútorných síl v priereze prutu pre ohybový moment  $M_y$ :

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = -\frac{E}{r} \int_A yz dA = -\frac{E}{r} D_{yz} = 0. \quad (3.5)$$

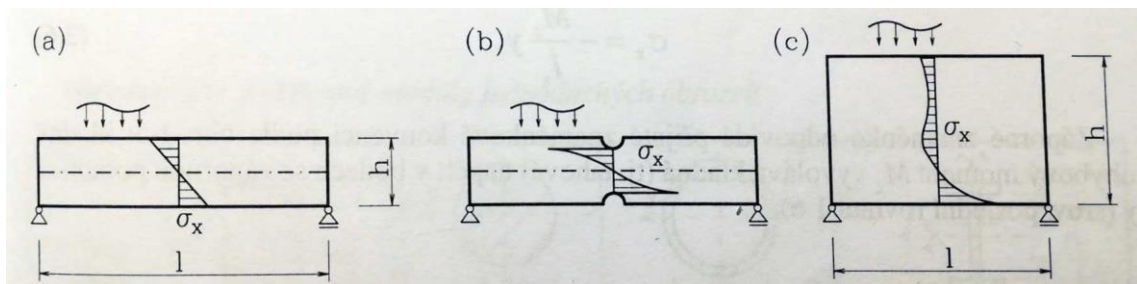
Z rovnice (3.5) plynie vzťah pre krivosť ohnutej strednice prutu v rovine  $xz$ :

$$\frac{1}{r} = \frac{M_y}{EI_y} \quad (3.6)$$

Táto rovnica definuje deformácie ohýbaného prutu vyvolané ohybovými momentami a je základným vzťahom pre určenie pretvorenia prutu. Jej dosadením do rovnice (3.3) získame:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \quad (3.7)$$

Normálové napätia v priereze teda prebiehajú lineárne po výške nosníku a extrémne hodnoty vznikajú v krajných bodoch – obr.3.3.



**Obr. 3.3:** Priebeh normálových napätí v priereze nosníku a steny

### 3.1.1 Prierezový modul

Pokiaľ posudzujeme ohýbaný nosník podľa teórie pružnosti, vychádzame z rovnice (3.7). Extrémne napätia vznikajú v krajných bodoch prierezu a pri ohybe v rovine xz sú rovné:

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{I_y} c_1, \quad \sigma_{x2} = -\frac{M_y}{I_y} c_2, \quad (3.8)$$

kde  $c_1$  a  $c_2$  sú vzdialenosti krajných bodov prierezu od ťažiskovej osy y. Pokiaľ označíme:

$$W_{y1} = \frac{I_y}{c_1} \quad W_{y2} = \frac{I_y}{c_2}, \quad (3.9)$$

potom rovnice (3.8) môžeme vyjadriť takto:



$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{W_{y1}}, \quad \sigma_{x2} = -\frac{M_y}{W_{y2}}. \quad (3.10)$$

Veličinu  $W$  nazývame prierezový modul, má rozmer  $L^3$  a udávame ju v  $m^3$ .

U obecného prierezu rozlišujeme dva prierezové moduly ku každej hlavnej ose, teda napr. k ose  $y$  podľa vzťahov (3.9) modul k spodným ( $W_{y1}$ ) a horným ( $W_{y2}$ ) vláknám. Pokiaľ je však prierez k určitej ose symetrický, sú prierezové moduly k oboom krajným vláknám zhodné a nie je treba ich odlišovať indexami.

### 3.1.2 Návrh a posúdenie prierezu pri ohybe

Pri posudzovaní ohýbaného prierezu na medzný stav únosnosti podľa teórie pružnosti rozhoduje napätie v krajných vláknach, ktoré nesmie prekročiť výpočtovú (návrhovú) pevnosť. Pre symetrický prierez u materiálu so zhodnou výpočtovou pevnosťou v ťahu a tlaku je potom výpočtový moment únosnosti prierezu v ohybe k ose  $y$  rovný:

$$M_{Rd} = W_y f_d = W_y \frac{f_k}{\gamma_M}, \quad (3.11)$$

Kde  $f_d$  predstavuje výpočtovú pevnosť materiálu,  $f_k$  charakteristickú pevnosť a  $\gamma_M$  súčiniteľ spoľahlivosti materiálu.

Pokiaľ teda určíme vo vyšetrovanom priereze ohybový moment  $M_{sd}$  vyvolaný výpočtovým zaťažením, potom podmienka spoľahlivosti znie:

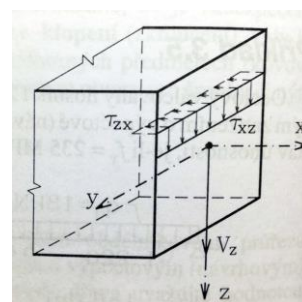
$$M_{sd} \leq M_{Rd}, \quad (3.12)$$

kde  $M_{sd}$  zavádzame kladnou (absolútnou) hodnotou. Ak má nosník stály prierez, rozhoduje extrémny ohybový moment.

Predchádzajúce vzťahy platia za predpokladu, že je zabezpečené rovinné pôsobenie, takže nemôže dôjsť k jeho takzvanému klopeniu (krúteniu), teda ku strate stability za ohybu.

## 3.2 ŠMYKOVÉ NAPÄTIA ZA OHYBU

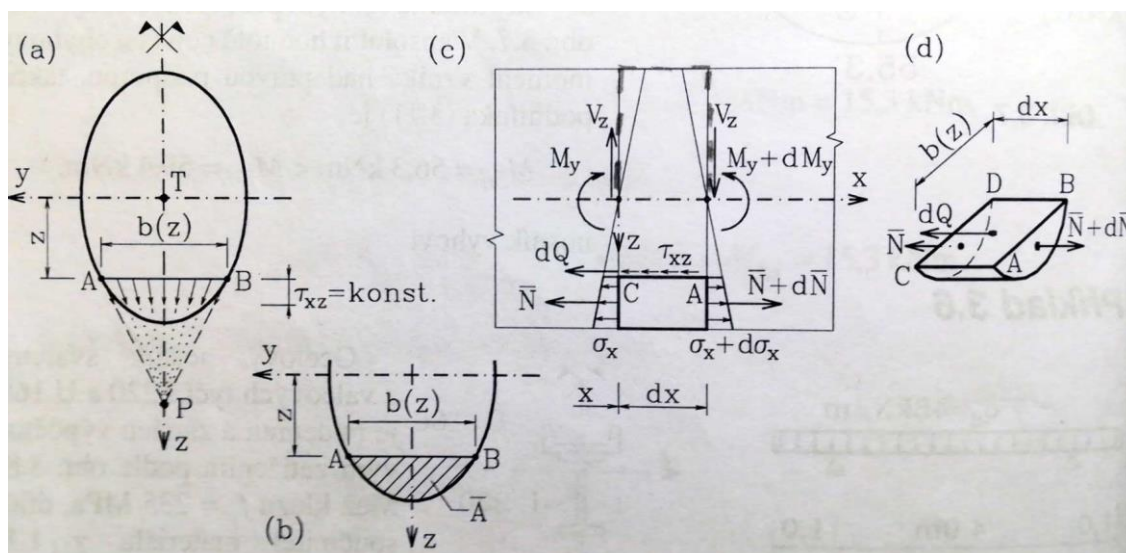
Pre výpočet šmykového napätia za ohybu vyjdeme z podmienky rovnováhy a využijeme vetu o vzájomnosti šmykových napätí, z ktorej vyplýva, že zložky šmykového napätia v zvislom reze  $\tau_{xy}$  a vo vodorovnom reze  $\tau_{zx}$  sú zhodné.



**Obr. 3.4:** Vzájomnosť zložiek  $\tau_{xy}$  a  $\tau_{zx}$

### 3.2.1 Nosník stálego prierezu

Uvažujme nosník stálego prierezu, symetrický k rovine xz (na obr. 3.5 zvislá).



**Obr. 3.5:** K odvodeniu šmykového napätia v ohýbanom nosníku

Vyjdime z dvoch približných predpokladov, ako ich formuloval Grashof:

- a) Pozdĺž rovnobežky s neutrálnou osou (tj. pozdĺž priamky  $z=\text{konšt.}$ ) je zvislá zložka šmykového napätia konštantná:  $\tau_{xz} = \text{konštanta}$ ,
- b) Vektory výsledných šmykových napätí pozdĺž tejto priamky smerujú do spoločného bodu – k priesečníku tečien k obrysu prierezu (bod P na obr. 3.5).

Sledujme teraz elementárny úsek nosníku o dĺžke  $dx$  – obr. 3.10c. Ohybový moment v pravom priereze je obecné odlišný od momentu v ľavom reze, takže ním vyvolané normálové napätia  $\sigma_x$ , ktorých lineárny priebeh po výške sa riadi rovnicou (3.7), sú tiež rôzne v oboch rezoch vzájomne vzdialených o  $dx$ . Ak teraz uvoľníme z uvažovaného elementu jeho spodnú časť, obmedzenú rovinou  $z = \text{konšt.}$ , potom výslednice normálových napätí na oboch protiľahlých plôškach budú tiež rozdielne: v priereze  $x$  je to  $\bar{N}$ , v priereze  $x + dx$  potom  $\bar{N} + d\bar{N}$  – obr. 3.5c,d. Ak označíme  $\bar{A}$  časť plochy pod úsečkou  $\bar{A}\bar{B}$ , potom integráciou napätí  $\sigma_x$ , daných vzťahom (3.7), po tejto ploche dostávame silu  $\bar{N}$  a jej diferenciál  $d\bar{N}$ :

$$\bar{N} = \int_{\bar{A}} \sigma_x dA = \frac{M_y}{I_y} \int_{\bar{A}} z dA = \frac{M_y}{I_y} \bar{S}_y, \quad (3.13)$$

$$d\bar{N} = \frac{d\bar{N}}{dx} dx = \frac{d}{dx} \left( \frac{M_y}{I_y} \bar{S}_y \right) dx = \frac{dM_y}{dx} \frac{\bar{S}_y}{I_y} dx = V_z \frac{\bar{S}_y}{I_y} dx, \quad (3.14)$$

kde  $\bar{S}_y$  predstavuje statický moment oddelenej časti prierezu (zašrafovej na obr. 3.10b) k ose  $y$ . Pretože je prierez nosníku konštantný, uplatnia sa derivácie len u ohybového momentu  $M_y$  a podľa Schwedlerovej vety vedie na posúvajúcu silu  $V_z$ .

Na hornej plôške odrezanej časti (ABCD na obr. 3.10d) pôsobia rovnomerne rozdelené šmykov napätia  $\tau_{zx}$ , ktorých výslednica je:

$$dQ = \tau_{zx} b(z) dx. \quad (3.15)$$

Z podmienky rovnováhy oddelenej časti v smere x (obr.3.5d):

$$-d\bar{Q} - \bar{N} + (\bar{N} + d\bar{N}) = 0, \quad (3.16)$$

z rovníc (3.14) a (3.15) plynie

$$d\bar{Q} = \tau_{zx} b(x) dx = d\bar{N} = V_z \frac{\bar{S}_y}{I_y} dx. \quad (3.17)$$

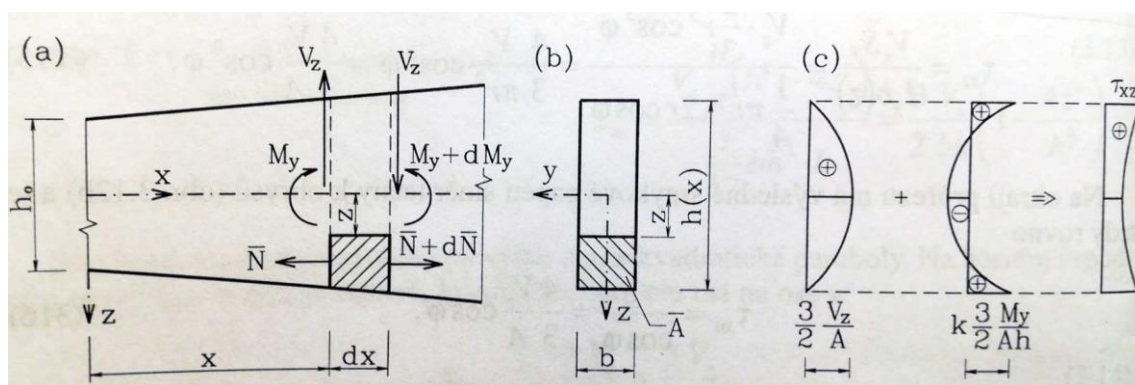
Napätie  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  je teda rovné:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y b(z)}, \quad (3.18)$$

Kde  $V_z$  je posúvajúca sila v danom priereze,  $\bar{S}_y$  statický moment „oddelenej“ časti prierezu,  $I_y$  moment zotrvačnosti (celého) prierezu k ose y,  $b(z)$  šírka v uvažovanom mieste. Vzťah (3.18) nazývame Grashofov vzorec.

### 3.2.2 Nosník premenného prierezu

U nosníku premenného prierezu je rozloženie šmykového napätia odlišné než u prismatického prutu. Vzhľadom na zložitosť úlohy sa obmedzíme na prut obdĺžnikového prierezu s lineárne premennou výškou – obr. 3.6.



**Obr. 3.6:** Šmykové napätia v nosníku lineárne premennej výšky

Výšku prierezu  $h(x)$ , statický moment oddelenej časti  $\bar{S}_y$  a moment zotrvačnosti  $I_x$  môžeme vyjadriť:

$$h(x) = h_0 + kx, \quad \bar{S}_y(x) = \frac{b}{8}(h^2(x) - 4z^2), \quad I_x(x) = \frac{1}{12}bh^3(x), \quad (3.19)$$

kde  $h_0$  je výška v počiatku súradníc a  $k$  konštanta úmernosti.

Ak oddelíme rezom  $z = \text{konšt.}$  spodnú časť elementu prutu o dĺžke  $dx$  (obr.3.6a), je čiastková výslednica normálových napätí na čelnej ploche  $\bar{N}$  opäť daná vzťahom (3.13), avšak tentokrát – na rozdiel od prutu stáleho prierezu – sú aj geometrické veličiny  $\bar{S}_y$  a  $I_x$  funkciou  $x$ . Použitím pravidiel o derivácii zlomku a súčinu, môžeme zapísať:

$$\frac{d\bar{N}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{M_y \bar{S}_y}{I_y} \right) = \frac{1}{I_y^2} \left[ I_y \frac{d(M_y \bar{S}_y)}{dx} - M_y \bar{S}_y \frac{dI_y}{dx} \right] = \frac{dM_y}{dx} \frac{\bar{S}_y}{I_y} + \frac{M_y}{I_y} \frac{d\bar{S}_y}{dx} - \frac{M_y \bar{S}_y}{I_y^2} \frac{dI_y}{dx}, \quad (3.20)$$

Derivácia ohybového momentu je podľa Schwedlerovej vety posúvajúca sila  $V_z$  a derivácie geometrických veličín odvodíme zo vzťahov (3.19):

$$\begin{aligned} \frac{dh(x)}{dx} &= k, \quad \frac{d\bar{S}_y}{dx} = \frac{b}{8} 2h(x) \frac{dh(x)}{dx} = \frac{1}{4}kbh, \\ \frac{dI_y}{dx} &= \frac{1}{12}b3h(x)^2 \frac{dh(x)}{dx} = \frac{1}{4}kbh^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dosadením do (3.20) a vyjadrením šmykového napätia zo vzťahu (3.17) získame po úprave:

$$\tau_{xz} = \frac{1}{b} \frac{d\bar{N}}{dx} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{bh} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{kM_y}{bh^2} \left( 1 - 12 \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (3.22)$$

Je zrejmé, že rozloženie šmykového napätia po výške prierezu sa môže podstatne líšiť od priebehu v nosníku konštantného prierezu. Na hornom a spodnom okraji už nie je šmykové napätie rovné nule.

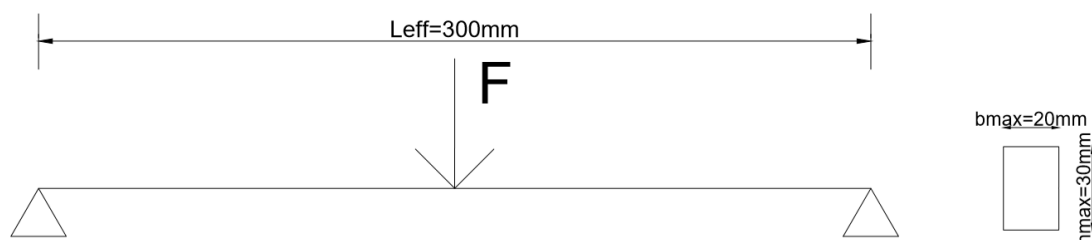
## 4 KONKRÉTNÁ OPTIMALIZAČNÁ ÚLOHA

Konkrétnym prípadom optimalizačnej úlohy spracovanej v tejto práci je model простého nosníku namáhaného osamelým bremenom uprostred rozpätia. Cieľom je dosiahnuť maximálny pomer únosnosti vzhľadom ku vlastnej hmotnosti. Uvažovaným materiálom je akrylonitril butadien stýren (ABS) – termoplastický polymér, ktorého základné vlastnosti boli popísané v kapitole 1.1.2 – pretože jednotlivé modely z postupu optimalizácie budú vytvorené pomocou aditívnej technológie FDM (kapitola 1.1.1) a následne testované v zaťažovacom stroji.

Okrajovými geometrickými podmienkami sú teoretické rozpätie  $L_{eff}$ , ktoré má nemennú hodnotu 300mm a maximálne rozmery prierezu:

$$L_{eff} = 300mm, \quad h \leq 30mm, \quad b \leq 20mm, \quad (4.1)$$

kde  $h$  je výška a  $b$  šírka ľubovoľného rezu nosníku.



**Obr. 4.1:** Schéma úlohy zobrazujúca maximálne rozmery nosníku

Vnútorne sily spočítame pomocou jednoduchých vzťahov:

$$M(x) = \frac{F}{2} x, \quad V = \frac{F}{2}, \quad (4.2)$$

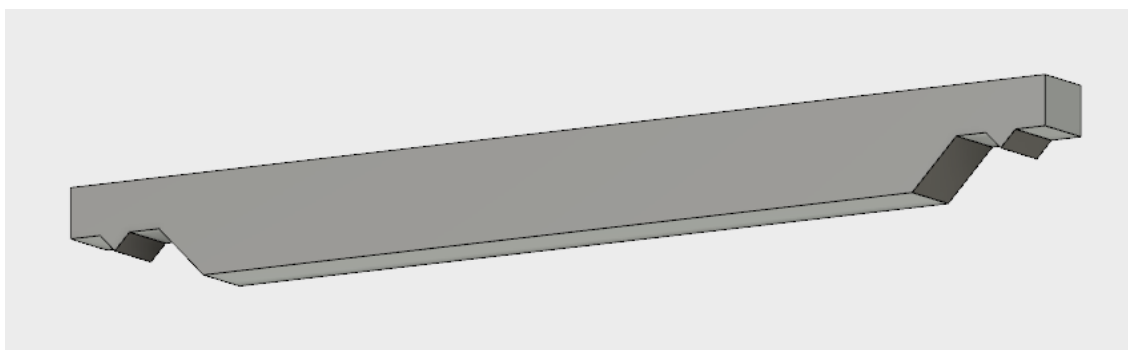
a napätia:

$$\sigma_x = \frac{M}{I_y} z, \quad \tau_{max} = \frac{2}{3} \frac{V}{bh}. \quad (4.3)$$

V nasledujúcich podkapitolách budú popísané geometrické vlastnosti troch návrhových modelov, spoločne s výpočtovými postupmi, ktoré viedli k ich návrhu. Progresivita modelov bude rásť od prvého k poslednému.

## 4.1 MODEL Č.1

Jedná sa o takzvaný referenčný model, pretože zaberá maximálny dostupný priestor, s výnimkou oblastí v blízkosti podpôr, kde sa jeho výška lineárne znižuje smerom k voľným koncom pre zabezpečenie vyššej stability (zabránenie strate stability klopením).



**Obr. 4.2:** Model č.1 – „referenčný model

Na obrázku 4.2 môžeme vidieť počítačový model návrhu č.1. V priereze uprostred rozpätia má maximálne prípustné rozmery pre danú optimalizačnú úlohu, čiže výšku  $h=30\text{mm}$  a šírku  $b=20\text{mm}$ . V oblasti podpôr je jeho výška kvôli stabilite znížená na  $15\text{mm}$ , avšak stojí na  $5\text{mm}$  vysokých hranoloch (s trojuholníkovou podstavou), ktoré sú jeho konštrukčnou súčasťou. Model teda stojí iba na dvoch hranách šírky  $20\text{mm}$ , ktorých vzájomná vzdialenosť je  $300\text{mm}$ , čiže zabezpečujú nemennosť zadaného teoretického rozpätia  $L_{\text{eff}}$ .

Na výrobu skutočného modelu bola použitá 3D tlačiareň Zortrax M300, ktorá využíva technológiu FDM (kapitola 1.1.1), a materiál ABS od spoločnosti Fillamentum. Výrobca udáva pre daný materiál ohybovú pevnosť  $60\text{Mpa}$  a modul pružnosti  $1,9\text{GPa}$ . Ako vnútorná výplň bola zvolená štruktúra honeycomb s hustotou  $50\%$ .



**Obr.4.3:** Ukážky rôznych hustôt štruktúry honeycomb

Na obrázku 4.4 je fotografia hotového modelu č.1, na ktorej je možné si všimnúť mierneho prehnutia smerom nahor (proti smeru pôsobenie zamýšľaného zaťaženia), spôsobeného pri výrobnom procese. Táto mierna porucha je spôsobená problematickosťou materiálu ABS, ktorý má relatívne vysokú tepelnú rozťažnosť, a veľkými rozmermi nosníku, nemala by však negatívne ovplyvniť ohybovú pevnosť prvku.



**Obr.4.4:** Fotografia vyrobeného modelu č.1

#### 4.1.1 Výpočtový model 1. návrhu

Materiálové charakteristiky pre ABS:

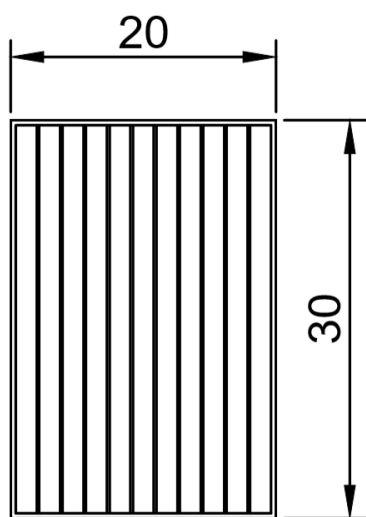
$$E = 1,9GPa, \quad \nu = 0,4, \quad f_d = 60Mpa, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{1,9}{2(1+0,4)} = 0,68GPa. \quad (4.4)$$

Pomocou vzťahov z kapitoly 3 a vzťahov z nich odvodených vypočítame predpokladanú únosnosť a maximálny priehyb pri porušení modelu č.1. Keďže sa jedná o nosník konštantného prierezu, mala by nám dať uvedená teória relatívne presné výsledky.

Problém však nastáva pri určení prierezových charakteristík, keďže nosník nie je spojitou vyplnený materiálom, ale ukrýva v sebe komplexnú štruktúru. Autor tejto práce preto použil retrospektívny prístup – analyzoval rozloženie materiálu v priereze, v ktorom došlo k porušeniu (obr. 4.5), a to sme

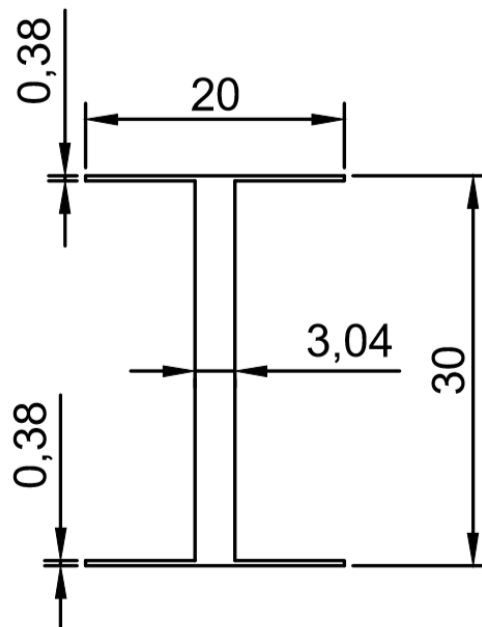


následne nahradili modelom (obr.4.6), ktorý má rovnaký moment zotrvačnosti v smere kolmom na osu y, ale je jednoduchšie určiť hodnoty jeho prierezových charakteristík.



**Obr. 4.5:** Skutočné rozloženie materiálu v priereze

⇒



**Obr. 4.6:** Náhradný model rozloženia materiálu

Pre nahradný model rozloženia materiálu sme určili hodnotu momentu zotrvačnosti a prierezovú plochu:

$$I_y = 9,667 \cdot 10^{-9} m^4, \quad A = 1,04 \cdot 10^{-4} m^2, \quad A_x = 0,87 \cdot 10^{-4} m^2$$

A z neho pomocou vzorca (3.9) vypočítali prierezový modul:

$$W_y = \frac{I_y}{c} = \frac{9,667 \cdot 10^{-9}}{0,015} = 6,445 \cdot 10^{-7}. \quad (4.5)$$

Výpočtový moment únosnosti je potom:

$$M_{Rd} = W_y \cdot f_d = 6,445 \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 10^6 = 38,67 Nm. \quad (4.6)$$

To znamená, že model č.1 by mal uniesť

$$F = \frac{4M}{L} = \frac{4 \cdot 38,67}{0,3} = 514,6 N, \quad (4.7)$$

čiže viac než 51 kilogramov a pritom by mal dosiahnuť maximálny prieťah

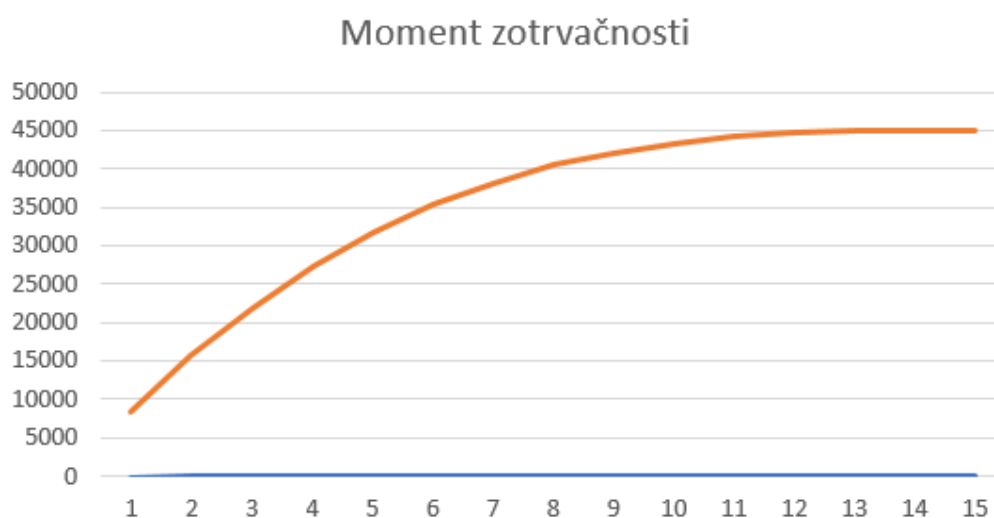
$$w = \frac{FL^3}{48EI} + \frac{FL}{4GA_x} = \frac{514,6 \cdot 0,3^3}{48 \cdot 1,9 \cdot 10^9 \cdot 9,667 \cdot 10^{-9}} + \frac{514,6 \cdot 0,3}{4 \cdot 0,68 \cdot 10^9 \cdot 0,87 \cdot 10^{-4}} = 0,0164m, \quad (4.8)$$

takže predpokladáme, že maximálny priehyb nosníku bude 16,4mm. [5]

## 4.2 MODEL Č.2

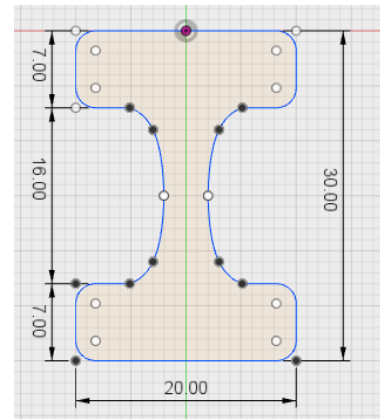
Pri návrhu druhého modelu sme hľadali najúčinnjší tvar prierezu uprostred rozpätia, v ňom vypočítali priebeh normálových a šmykových napätí od zvoleného zaťaženia a následne nadimenzovali prierezy v jednej štvrtine a tesne u podpory tak, aby v nich bol materiál využitý na 100% vzhľadom na odpovedajúce vnútorné sily.

Za základný tvar prierezu bol zvolený profil I, keďže ten má veľmi účinné rozloženie materiálu pre prenos ohybového zaťaženia. Rozhodujúcim parametrom pre ohybovú únosnosť symetrického I profilu je hrúbka jeho pásnic  $t_f$ . Na obrázku 4.7 je znázornená závislosť veľkosti momentu zotrvačnosti na hrúbke pásnic. Pre návrh prostredného prierezu bolo zvolené  $t_f = 7mm$ , kde má krivka ešte relatívne prudký spád a prierez dosahuje 85% z maximálneho dosiahnuteľného momentu zotrvačnosti.



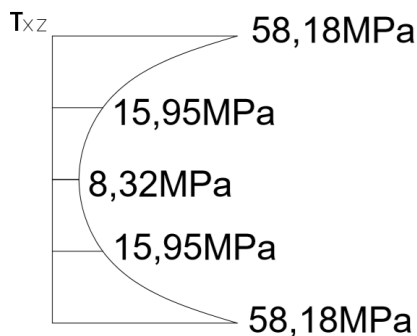
**Obr. 4.7:** Závislosť momentu zotrvačnosti  $I_y$  [mm<sup>4</sup>] (zvislá osa) na hrúbke pásnic  $t_f$  [mm].

Za návrhové zaťaženie bola zvolená sila 2KN, pri ktorej je prierez využitý z 98% na ohyb. Hrúbka stojny  $t_w$  bola stanovená tak, aby stojna samotná odolávala celkovej návrhovej posúvajúcej sile, teda  $t_w = 4mm$ . Na obrázku 4.8 je znázornený tvar prierezu uprostred rozpätia. Jeho hrany sú zaoblené, aby sa zabránilo koncentráciám a prudkým prechodom napätí.

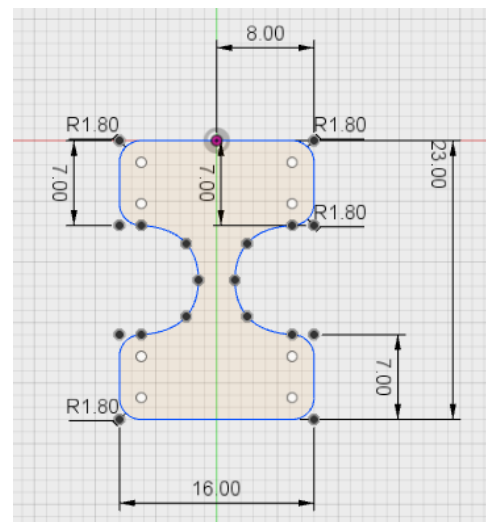


**Obr. 4.8:** Tvar prierezu modelu č.2 uprostred rozpätia

Pre návrh prierezu v jednej štvrtine rozpätia bola využitá teória pre nosník premenného prierezu, opísaná v kapitole 3.2.2. Na obrázku 4.9 je znázornený priebeh šmykového napätia, ktoré, ako je možné si všimnúť, sa koncentruje viac do krajných vlákien, než je tomu o prierezu v  $L/2$ . Na obrázku 4.10 je potom znázornený navrhnutý prierez v jednej štvrtine rozpätia, ktorý je optimalizovaný na odpovedajúce šmykové a normálové napätie.



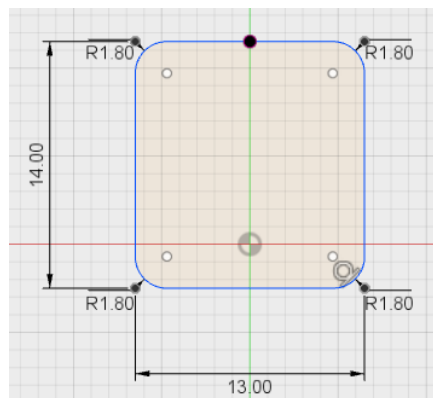
**Obr. 4.9:** Priebeh šmykového napätia prierezu v  $L/4$



**Obr. 4.10:** Tvar optimalizovaného prierezu v  $L/4$

Tesne u podpory je navrhnutý prierez blízky štvorcovému tvaru, zobrazený na obrázku 4.11. Je to najslabšie miesto prierezu, avšak pôsobí v ňou už len veľmi malý ohybový moment a na šmyk bezpečne vyhoví.

Po vytvorení obrysov kritických rezov ich spolu plynule prepojíme a tak docielime vytvorenie počítačového modelu druhého návrhu. Konečný model zobrazený na obrázku 4.12 bolo ešte nutné orezať v koncových oblastiach, keďže tento model bude vyrobený v inej 3D tlačiarňi než ten minulý, a síce v stroji Prusa MK3 i3, ktorý má menší pracovný priestor (21x25cm) v porovnaní so Zortraxom M300 (30x30cm).



**Obr. 4.11:** Prierez tesne u podpory



**Obr. 4.12:** Počítačový model návrhu č.2

Na obrázku 4.12 je tiež možné si všimnúť zaoblenia hrotu pravej podpory. Táto úprava bola aplikovaná, aby bol eliminovaný vplyv krútiacich momentov na nosník.



**Obr. 4.13:** Reálny model č.2

Za využitia vzťahov z kapitoly 4.1.1 sme vypočítali, že nosník by mal pri zaťažení 2KN dosiahnuť maximálneho priehybu 16,2mm. [6]

### 4.3 MODEL Č.3

Pre návrh tretieho modelu boli výpočtové metódy použité na vytvorenie predošlého modelu zautomatizované v prostredí tabuľkového procesoru Excel. Ako návrhové premenné sú definované geometrické parametre:

$h...$  výška prierezu v polovici rozpätia,

$h_0..$  výška prierezu nad podporou,

$b...$  šírka prierezu v polovici rozpätia,

$b_0..$  šírka prierezu nad podporou,

$t_f...$  hrúbka pásnice v polovici rozpätia,

$t_{f0}..$  hrúbka pásnice nad podporou,

$t_w..$  šírka stojny v polovici rozpätia a

$t_{w0}.$  šírka stojny nad podporou.

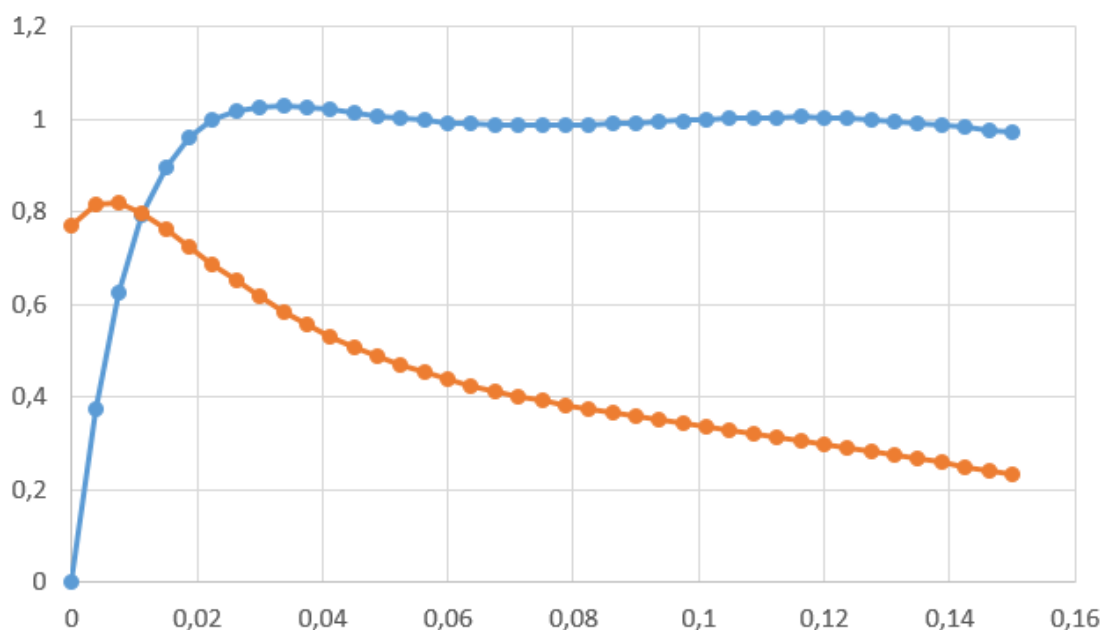
Výška  $h$  a šírka  $b$  sú dané okrajovými podmienkami vyplývajúcimi zo zadania optimalizačnej úlohy, čiže  $h=30\text{mm}$  a  $b=20\text{mm}$ . Za návrhové zaťaženie, tak ako u predošlého modelu, boli zvolené 2KN. Pomocou vzorcov (4.2) a (4.3) vypočítame priebeh vnútorných síl a napätí.

Geometrické parametre medziľahlých prierezov sú definované polynomicou funkciou tretieho rádu, do ktorej uvedené návrhové parametre vstupujú ako riadiace premenné a ktorej tvar bol navrhnutý tak, aby bolo možné sa u všetkých prierezov čo najviac priblížiť stopercentnému využitiu materiálu<sup>1</sup>. V oblasti jednej štvrtiny rozpätia však nebolo možné dostatočne sa priblížiť k plnému využitiu materiálu a tak bola vytvorená dodatková funkcia štvrtého rádu, do ktorej ako návrhové premenné

---

<sup>1</sup> Požadovaný tvar funkcie vypočítal doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D.

vstupujú geometrické parametre prierezu v jednej štvrtine rozpätia:  $h_4$ ,  $b_4$ ,  $t_{f4}$  a  $t_{w4}^2$ .



**Obr. 4.14:** Tento graf zobrazuje mieru využitia materiálu (zvislá osa, 1 značí 100 percentné využitie) v jednotlivých rezoch modelu č.3 (vodorovná osa, vzdialenosť od podpory v [m]), modrá línia značí využitie na ohybový moment, oranžová na posúvajúcu silu.

Stav na obrázku 4.14 bol dosiahnutý náhodnými úpravami návrhových parametrov. Prvotne bolo možné dosiahnuť stopercentného využitia materiálu na pôsobenie posúvajúcej sily v mieste podpory, avšak hrúbka pásnic bola v tomto priereze nebezpečne malá, čo by mohlo negatívne vplývať ako na mechanické vlastnosti materiálu, tak aj na samotnú výrobu. Preto bola zvolená dizajnová úprava, pri ktorej má šírka stojny v mieste podpory rovnakú hodnotu ako šírka prierezu (obdĺžnikový tvar).

Ďalej je z obrázku zrejmé, že by bolo namieste uvážiť použitie priehradovej štruktúry medzi pásnicami, keďže vo väčšine prierezov nie je materiál využitý na pôsobenie posúvajúcej sily. Takýto krok by si však vyžadoval

---

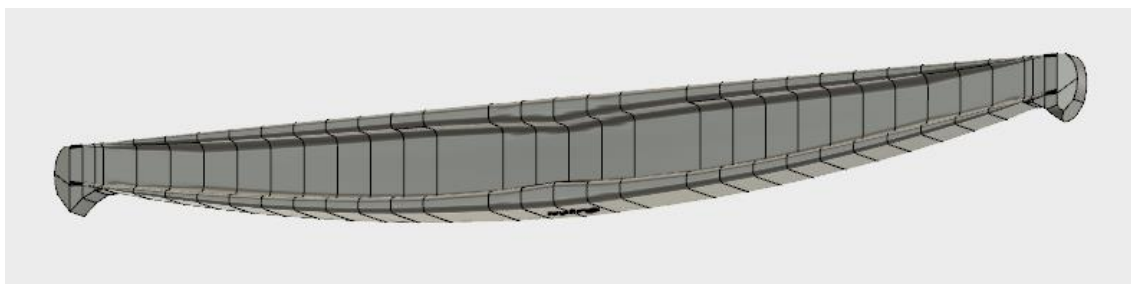
<sup>2</sup> Túto funkciu tiež objavil doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D. za použitia numerických metód.

obozretný prístup, vzhľadom na anizotropiu použitého materiálu (nebezpečenstvo porušenia ťahových aj tlakových diagonál v šmyku).

**Tab. 4.1:** Hodnoty navrhnutých parametrov

h0	0,01	m
h	0,03	m
b0	0,0085	m
b	0,02	m
tf0	0	m
tf	0,0069	m
tw0	0,0085	m
tw	0,002	m
h4	0,0002	m
b4	0,0005	m
tf4	0,0013	m
tw4	0,0001	m

V tabulke 4.1 sú zobrazená návrhové parametre, ktoré boli využité na určenie tvaru modelu č.3.



**Obr. 4.15:** Počítačový model návrhu č.3

Obrázok 4.16 zobrazuje model č.3 tesne po výrobe s ešte neodstránenými bočnými podporami pásnic a bez povrchovej úpravy.



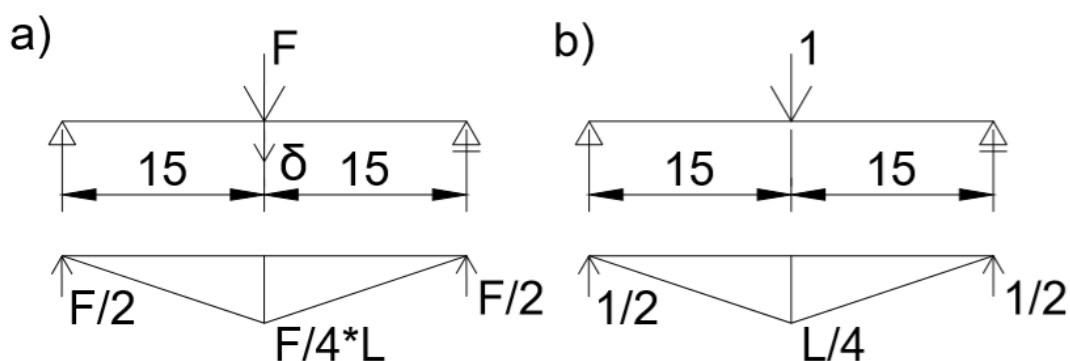
**Obr. 4.16:** Práve vytlačený model č.3

### 4.3.1 Výpočet predpokladaného priehybu

Na výpočet zvislého posunu uprostred rozpätia modelu č.3 použijeme metódu jednotkových síl:

$$\delta = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M\bar{M}}{EI(x)} dx, \quad (4.9)$$

kde  $\delta$  predstavuje posunutie,  $M$  je vnútorný moment od skutočného zaťaženia,  $\bar{M}$  je vnútorný moment od virtuálneho zaťaženia. Na obrázku 4.17a je znázornené pôsobenie skutočného zaťaženia a na 4.17b zaťaženia virtuálneho.



**Obr. 4.17:** a) skutočné zaťaženie, b) virtuálne zaťaženie.

V rovnici (4.9) je možné si všimnúť, že prierezový modul je závislý na súradnici  $x$ , čím sa výpočet výrazne komplikuje. Je však možné využiť Simpsonovho pravidla:

$$\int \sim \sum k_i f(x_i) \cdot \frac{dx}{3}; \quad k_i = 1, 4, 2, 4, \dots, 2, 4, 1, \quad (4.10)$$

kde

$$f(x_i) = \frac{M(x_i)\bar{M}(x_i)}{EI(x_i)}. \quad (4.11)$$

S výhodou použijeme už nami vytvorený Excelový súbor (tab. 4.2):



**Tab. 4.2:** Výpočet priehybu modelu č.3

	integrace průhybu			w	0,013985
				suma	4,195636
i	M	Mv	f	k	kf
0	0	0	0	1	0
1	10	0,005	0,017793	4	0,07117
2	20	0,01	0,039163	2	0,078325
3	30	0,015	0,053824	4	0,215296
4	40	0,02	0,063946	2	0,127892
5	50	0,025	0,071834	4	0,287335
6	60	0,03	0,078883	2	0,157766
7	70	0,035	0,08586	4	0,343439
8	80	0,04	0,093143	2	0,186287
9	90	0,045	0,100847	4	0,403388
10	100	0,05	0,108878	2	0,217756
11	110	0,055	0,116985	4	0,46794
12	120	0,06	0,124844	2	0,249688
13	130	0,065	0,132194	4	0,528777
14	140	0,07	0,139009	2	0,278017
15	150	0,075	0,14564	4	0,582559

Predpokladáme, že model č.3 dosiahne maximálneho priehybu pri zaťažení silou  $F=2\text{KN}$ .

## 5 VÝSLEDKY EXPERIMENTOV

Všetky testy boli uskutočňované za použitia zaťažovacieho stroja Zwich Roell Z100 a zároveň boli všetky tri modely zaťažované rovnakým spôsobom: boli voľne položené na podporách, ktoré sú súčasťou ich konštrukcie. Pred spustením aktívneho testu boli najskôr zaťažené počiatočným zaťažením o hodnote 5N, po započatí testu sa hlava pohybovala konštantnou rýchlosťou 10mm/min až do porušenia prvku.

Ako výstup z experimentu bol zaznamenávaný zvislý posun zaťažovacej hlavy a pohyb špičky extensometra osadeného blízko stredu hornej plochy nosníku v závislosti na pôsobiacom zaťažení. Ďalším výstupom je závislosť veľkosti pôsobiacej sily na čase, ktoré uplynul od začiatku testu.

### 5.1 MODEL Č.1

Vstupné veličiny:

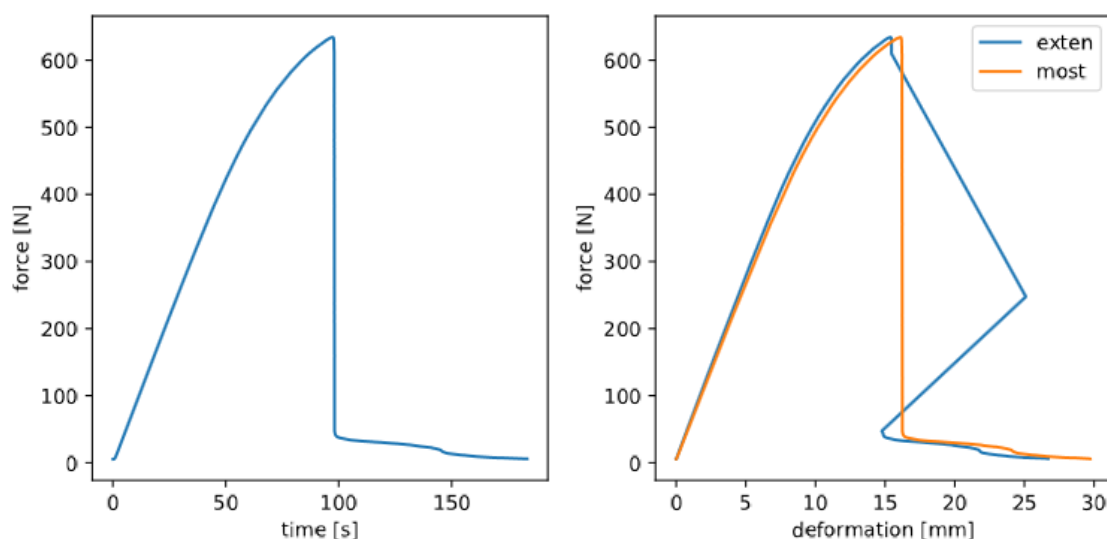
- Hmotnosť vzorku: 92,2g
- Vlhkosť vzduchu: 21,7%
- Teplota: 21,3°C

Výstupné hodnoty:

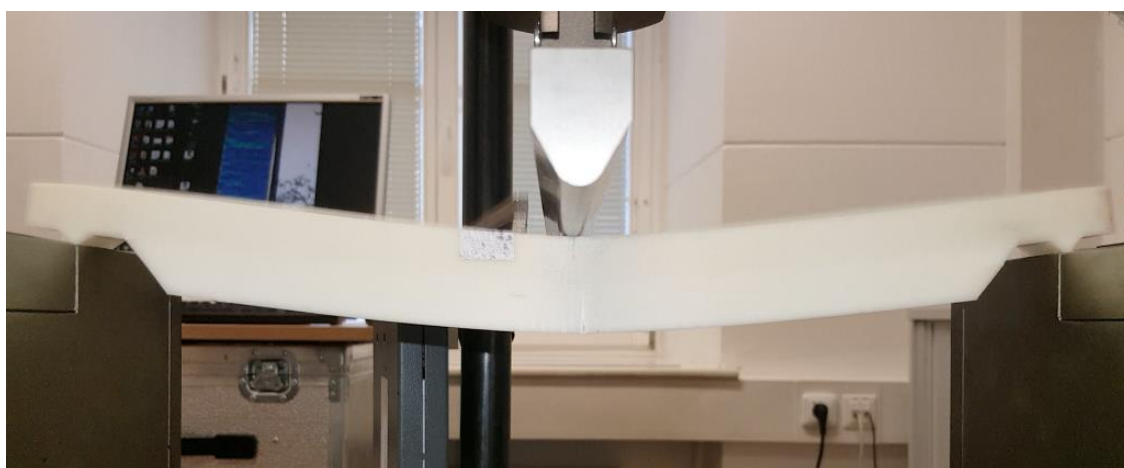
- Zaťaženie pri porušení: 633N
- Priehyb pri porušení: 16mm
- Trvanie testu: 95s

Model č.1 sa porušil ohybovou trhlinou, v spodných vláknach uprostred rozpätia. K porušeniu došlo náhle a bolo doprevádzané hlasným zvukovým prejavom. Po asi pol minúte sa ukázala jemná trhlina v ostrom prechode z nízkeho na zvyšujúci sa prierez blízko podpory, ktorá sa však nerozvinula.

Zhruba po jednej minúte sa začalo objavovať veľké množstvo krátkych jemných trhlín v oblasti spodných vlákien v okolí polovice rozpätia. Tieto trhliny sú dobre viditeľné pri nasmerovaní výkonného zdroja svetla do smeru rozvoja trhlín. Bočné steny sú zubovito porušené, zrejme odolávali zaťaženiu aj chvíľu po vyčerpaní ťahovej pevnosti v spodných vláknach.



**Obr. 5.1:** Výstupy zo záťažového testu modelu č.1, závislosť zaťaženia na čase a deformácii.



**Obr. 5.2:** Okamih porušenia

Na ľavom grafe v obrázku 5.1 je znázornená závislosť zaťaženia na čase, na grafe vpravo môžeme vidieť závislosť deformácie na zaťažení, kde modrá čiara predstavuje informácie z extensometru a oranžová zo záťažového

mostu. Krivka z extensometru je na grafe vpravo vychýlená prudko doprava, čo je dôsledok nadskočenia jeho hrotu pri prudkom porušení nosníku.



**Obr. 5.3:** Tesne po porušení

### **5.1.1 Porovnanie s predpokladom a vyhodnotenie**

V kapitole 4.1.1 sme predpokladali, že model č.1 sa poruší pri zaťažení silou 514,7N za súčasného priehybu uprostred 16,4mm. Odhad priehybu bol veľmi presný, pravdepodobne vďaka tomu, že sa jedná o nosník konštantného prierezu a teda vpadá do veľmi oboru veľmi dobre preskúmanej problematiky.

Navyše uniesol o viac než 10kg vyššiu záťaž. To sa dá pravdepodobne prisúdiť komplexnej vnútornej štruktúre. Zdroje uvádzajú, že produkty vytvorené technológiou FDM sú únosnejšie vtedy, keď sú menej tuhé.

Vzhľadom k svojej hmotnosti 92,2g uniesol model č.1 686-násobok svojej váhy.

## **5.2 MODEL Č.2**

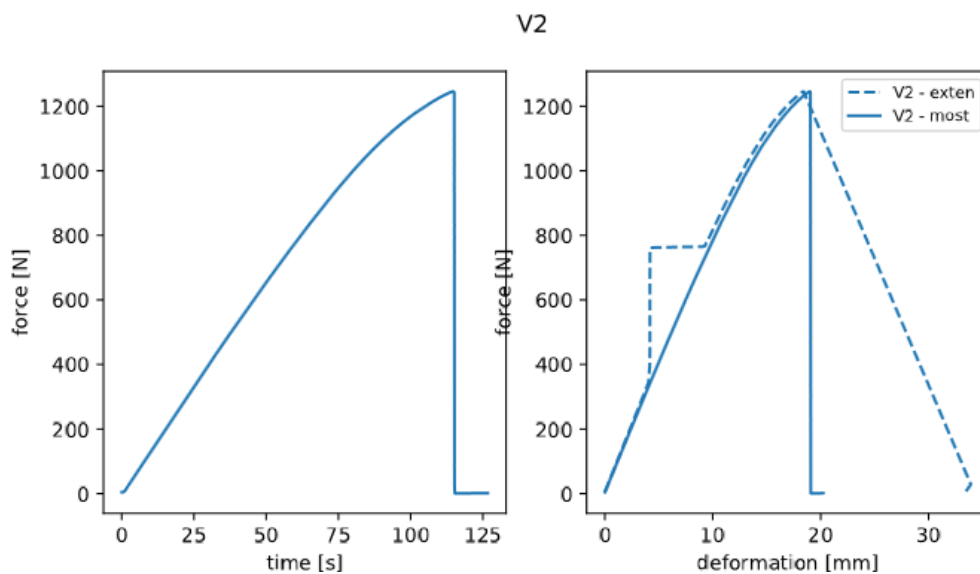
Vstupné veličiny:

- Hmotnosť vzorku: 81,8g

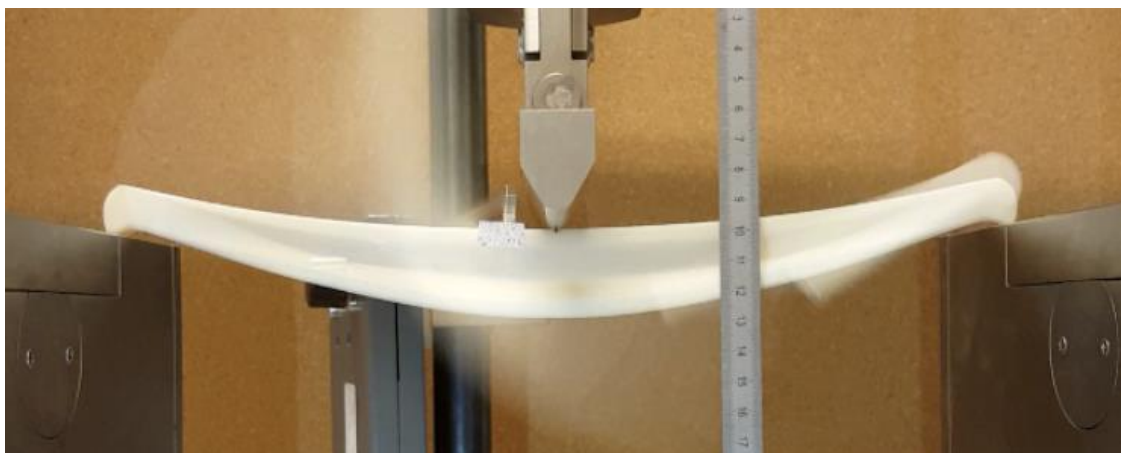
- Vlhkosť vzduchu: 24,4%
- Teplota: 24,1°C

Výstupné hodnoty:

- Zatiaženie pri porušení: 1225N
- Priehyb pri porušení: 18,5mm
- Trvanie testu: 114s



**Obr.5.4:** Výstupy zo záťažového testu modelu č.2, závislosť zaťaženia na čase a deformácii.



**Obr. 5.5:** Okamih porušenia modelu č.2

Model č.2 sa porušil veľmi prudko, priam až explozívne. Proces bol tak rýchly, že na jednej a tej istej snímke z kamery je možné vidieť prvok zároveň neporušený a zároveň už na pol ceste mimo záber. Počas celého zaťažovania nejavil model nijaké známky poškodenia. V grafoch na obrázku 5.4 je vidieť, že prakticky po celú dobu choval lineárne elasticky.



**Obr. 5.6:** Porušený model č.2

Na obrázku 5.6 je vidieť, že model č.2 sa porušil dlhou šmykovou trhlinou.

### **5.2.1 Porovnanie s predpokladom a vyhodnotenie**

V kapitole 4.2 sme predpokladali, že model č.2 znesie zaťaženie až 2000N a pri jeho pôsobení sa zdeformuje o 16mm. Zniesol však zaťaženie iba 1225N a už pri ňom sa zdeformoval o 18mm. Zjavným dôvodom pre nesprávne určenie priehybu je použitie prílišného zjednodušenia, ktorá nebolo namieste. Autor mal na výpočet použiť podobný postup, aký bol použitý u modelu č.3.

Čo sa týka únosnosti, je možné, že prierez uprostred rozpätia by bol schopný uniesť aj návrhové zaťaženie 2kN, ale prvok sa porušil v šmyku. Zjavne bolo dosiahnuté medzné šmykové pretvorenie v okolí jednej štvrtiny rozpätia.

81,8g vážiaci model č.2 uniesol viac než 1497-násobok svojej hmotnosti.

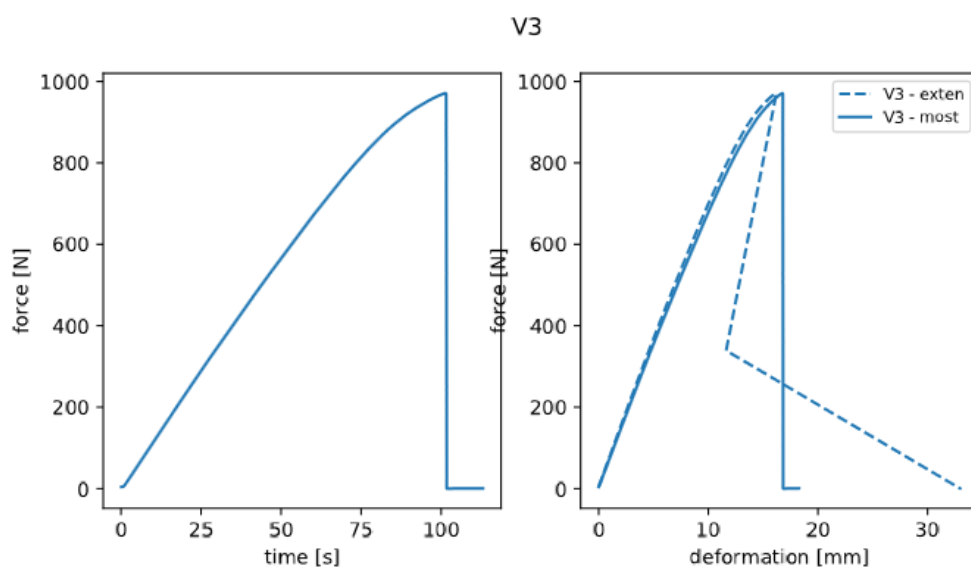
### 5.3 MODEL Č.3

Vstupné veličiny:

- Hmotnosť vzorku: 57,4g
- Vlhkosť vzduchu: 41%
- Teplota: 24,2°C

Výstupné hodnoty:

- Zataženie pri porušení: 965N
- Priehyb pri porušení: 16,5mm
- Trvanie testu: 102s



**Obr. 5.7:** Výstupy zo záťažového testu modelu č.3, závislosť zataženia na čase a deformácii.

Model č.3 sa podobne ako model č.2 porušil veľmi náhle a bez akéhokoľvek varovania a za hlasného prasknutia. Tentokrát bola pri zaznamenávaní záťažovania použitá kamera s vyššou frekvenciou snímania, takže sa podarilo zachytiť okamih porušenia. Trhlina sa pravdepodobne začala šíriť od spodných vlákien zhruba v jednej štvrtine rozpätia. Jedná sa teda opäť o typickú šmykovú trhlinu, ktorá sa však nerozvinula až po horný okraj.

Pravdepodobne sa totiž hneď po iniciovaní primárnej trhliny dostala na scénu delaminácia. Trhlina uprostred prvku je skutočne úplne vodorovná, v dĺžke asi desiatich centimetrov sa tu od seba oddelili dve susedné vrstvy.



**Obr. 5.8:** Moment porušenia modelu č.3

V úvahách o rozvoji trhliny je však nutné zohľadniť dynamický účinok, ktorý bol pri tak prudkom deji ako je tento určite významný. Trhlina zjavne prešla takmer celým prvkom, potom sa odrazila a putovala naspäť pričom takmer úplne oddelila hornú pásnicu od stojny. Je zrejmé, že pri návrhu podobných prvkov je potrebné zabezpečiť plynulejší tok naťatia medzi pásnicami a stojnou.

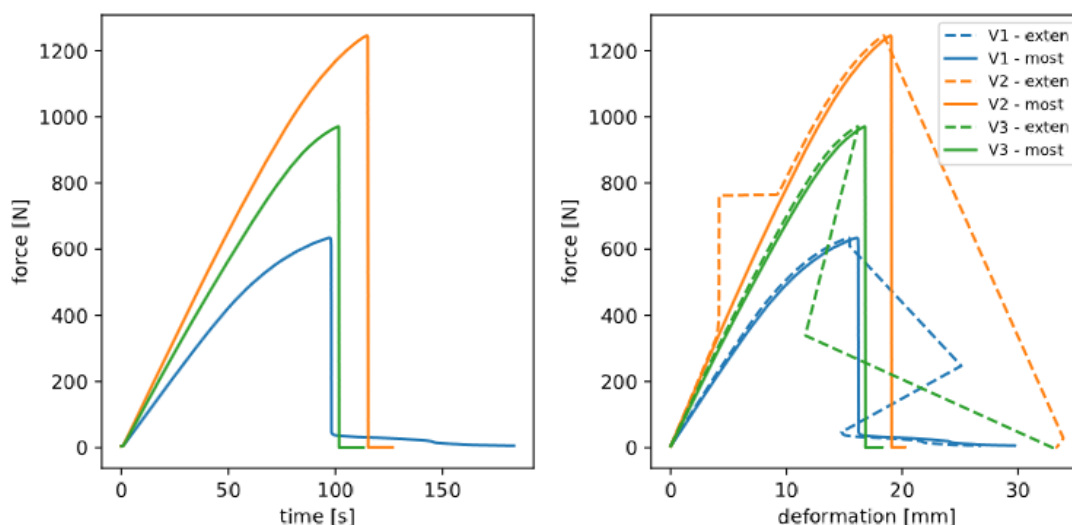
### **5.3.1 Porovnanie s predpokladom a vyhodnotenie**

V kapitole 4.3.1 sme predpokladali, že model č.3 unesie zaťaženie 2kN a pritom dosiahne maximálneho priehybu 14mm. Skutočný model neunesol ani polovicu návrhovej hodnoty, avšak tá slúžila skôr len ako určitá konštanta, podľa ktorej boli navrhované všetky rezy nosníku. Autor nepredpokladal, že by nosník č.3 mohol uniesť až také zaťaženie, vzhľadom na svoju subtlínosť.

Model č.3 uniesol pri hmotnosti 57,4g viac než 1681-násobok svojej váhy.



## 5.4 VZÁJOMNÉ POROVNANIE MODELOV



**Obr. 5.9:** Pracovné diagramy všetkých troch modelov

Vloženie pracovných diagramov všetkých troch modelov do jednotnej mierky nám dáva ďaleko lepšie povedomie o ich vzájomnej efektívite. Je zrejmé, že model č.2 zniesol najväčšie zaťaženie, ale ako nám ukazuje tabuľka 5.1, najvyšší pomer únosnosti vzhľadom ku svojej hmotnosti dosiahol model č.3. Avšak s prihliadnutím na charakter reálnych aplikácií, by bol model dva robustnejší a pravdepodobne aj trvácnejší.

**Tab. 5.1:** Porovnanie výsledkov z experimentálneho overenia

	Model č.1	Model č.2	Model č.3
Hmotnosť [g]	92,2	81,8	57,4
Únosnosť [kg]	63,3	122,5	96,5
Max.priehyb[mm]	16	18,5	16,5
Únosnosť / Hmotnosť [-]	686,6	1497,6	1681,2

## ZÁVER

Cieľom tejto práce bolo zoznámiť čitateľa s charakterom a predovšetkým potenciálom aditívnych technológií a generatívneho dizajnu pričom autor sám na jednoduchom príklade poukázal na moderný prístup k návrhu, výrobe a testovaniu konštrukčných prvkov a materiálov.

Boli vytvorené tri počítačové modely nosníkov, jeden referenčný a dva, pri ktorých boli použité mechanizmy štrukturálnej optimalizácie, ktoré boli následne vyrobené pomocou technológie 3D tlače. Vlastnosti vytvorených modelov konštrukčných prvkov boli následne experimentálne overené.

Komponenty sa chovali inak, než autor predpokladal a to ho priviedlo k záveru, že k uvažovaným problémom musí pristupovať komplexnejšie. Neodškriepiteľným pozitívom je však poznanie, ktoré popri tomto procese získal a ktoré môže aplikovať vo svojej budúcej profesii.

Výnimočné na tomto produkčnom prístupe je to, že inžinieri môžu ráno prísť s novým nápadom, cez deň ho rozvinúť a na druhý deň overiť správnosť vlastných úvah. Nie len že tak môžu rapídnejšie rozvíjať svoje nadanie, umožňuje im to tiež nadobudnúť akési cítenie s reálnym materiálom/konštrukciou.

Táto práca bola len poškrabaním povrchov nesmierne rozsiahlych a fascinujúcich oblastí a aj keď aditívna výroba zatiaľ nespôsobila prevrat v stavebnom priemysle, rozhodne má už dnes potenciál spôsobiť ho v prístupe k vzdelávaniu budúcej generácie stavebných inžinierov.

## POUŽITÁ LITERATÚRA

[1]

KLOSKI, Liza Wallach a Nick KLOSKI. *Začínáme s 3D tiskem*. Přeložil Jakub GONER. Brno: Computer Press, 2017. ISBN 978-80-251-4876-1.

[2]

In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-05-05]. Dostupné z:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/3D\\_printing](https://en.wikipedia.org/wiki/3D_printing)

[3]

P. W. Christensen et al. An introduction to structural optimization. English. Vol. 153. Dordrecht: Springer, 2009;2008

[4]

ŠMIŘÁK, Svatopluk. *Pružnost a plasticita I: pro distanční studium*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-7204-468-0.

[5]

KADLČÁK, Jaroslav a Jiří KYTÝR. *Statika stavebních konstrukcí*. V Brně: VUTIUM, 2007. ISBN 978-80-214-3428-8.

[6]

GORDON, J.E. *Structures, or, Why things don't fall down*. London: Penguin, 1991. ISBN 9780140136289.

## ZOZNAM TABULIEK

Tab. 4.1.....	47
Tab. 4.2.....	49
Tab. 5.1.....	57